概率论与数理统计

第一章　概率论的基本概念

- 样本空间，随机事件
- 频率和概率
- 等可能概型
- 条件概率
- 事件的独立性

§1 样本空间，随机事件

自然界与社会生活中的两类现象

$$\left\{\begin{array}{l}\text{确定性现象}\\ \\ \text{不确定性现象}\end{array}\right.$$

- 确定性现象：结果确定
- 不确定性现象：结果不确定

- 例：

  - 向上抛出的物体会掉落到地上（确定）
  - 打靶，击中靶心（不确定）
  - 买了彩票会中奖（不确定）

不确定现象：

- 个别现象
- 随机现象

在个别试验中其结果呈现出不确定性，但在大量重复试验中其结果又具有统计规律性。

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律的学科。

对随机现象的观察、记录、实验统称为随机试验。它具有以下特性：

- 可以在相同条件下重复进行；
- 事先知道可能出现的结果；
- 进行试验前并不知道哪个试验结果会发生。

例：

- 抛一枚硬币，观察试验结果；
- 对某路公交车某停靠站登记下车人数；
- 对某批电子产品测试其输入电压；
- 对听课人数进行一次登记；

(一) 样本空间

定义：随机试验E的所有结果构成的集合称为E的 样本空间，记为S={e}，

称S中的元素e为样本点，一个元素的单点集称为基本事件.

- 例：
  - 一枚硬币抛一次
  - 记录一城市一日中发生交通事故次数
  - 记录一批产品的寿命x
  - 记录某地一昼夜最高温度x，最低温度y

$S=\{$正面，反面$\}$；

$S=\{0, 1, 2, \cdots\}$；

$S=\{\ x \mid a \leqslant x \leqslant b\ \}$

$S=\{(x, y) \mid T_0 \leqslant y \leqslant x \leqslant T_1\}$；

（二）随机事件

一般我们称S的子集A为E的随机事件A，简称事件A. 当且仅当A所包含的一个样本点发生称事件A发生。

随机事件有如下特征：

- 事件A是相应的样本空间S的一个子集，其关系可用维恩(Venn)图来表示；
- 事件A发生当且仅当A中的某一个样本点出现；
- 事件A的表示可用集合，也可用语言来表示。

- 例：观察89路公交车浙大站候车人数。

S={0, 1, 2, …}；

A={至少有10人候车}={10, 11, 12, …}

S，A为随机事件，

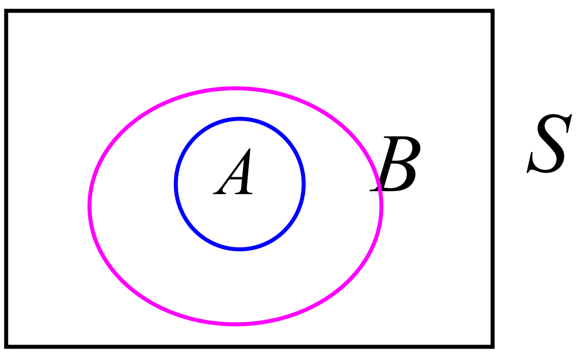
A可能发生，也可能不发生。

- 由一个样本点组成的单点集，称为基本事件。
- 如果将S亦视作事件，则每次试验S总是发生，故又称S为必然事件。
- 记Φ为空集，不包含任何样本点, 则每次试验Φ都不发生, 称Φ为不可能事件。

(三) 事件的关系及运算

❖事件的关系（包含、相等）

1° $A \subset B$： 事件A发生一定导致B发生



$$2^\circ\ A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

例：

- 记A={明天天晴}，B={明天无雨} $\Rightarrow B \supset A$
- 记A={至少有10人候车}，B={至少有5人候车}

$$\Rightarrow B \supset A$$

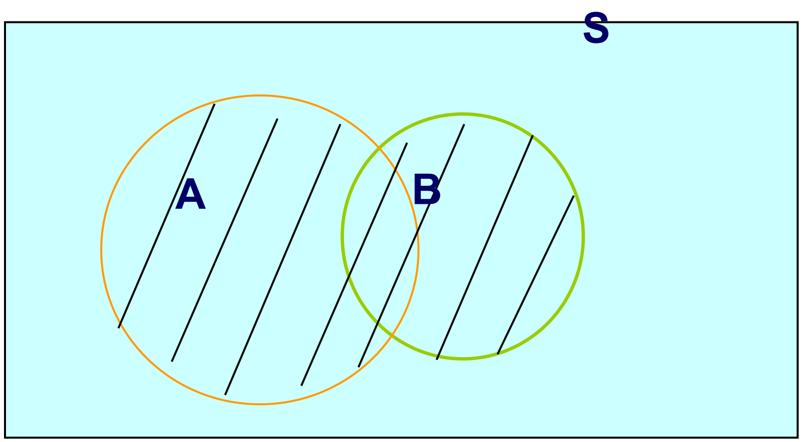
- 抛两颗均匀的骰子，两颗骰子出现的点数分别记为x, y. 记A={x+y为奇数}，B={两次的骰子点数奇偶性不同}，则 $\Rightarrow B = A$

事件的运算

- A与B的和事件，记为 $A \cup B$

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \}:$$

A与B至少有一发生。

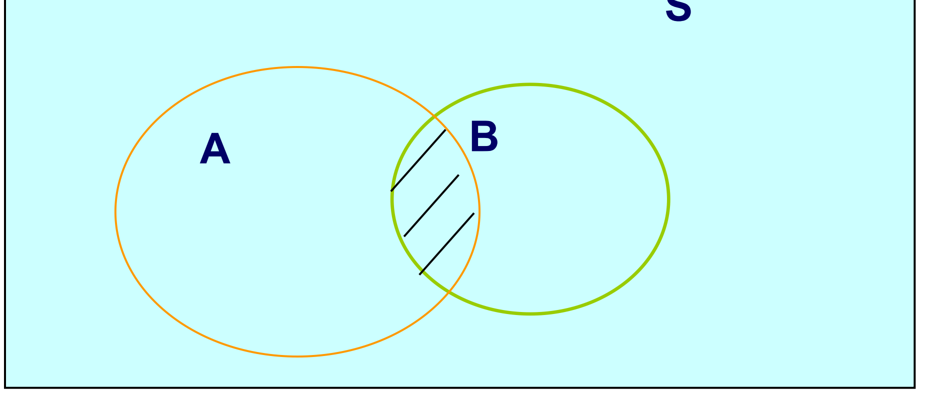


事件的运算

- A与B的积事件，记为$A\cap B, A\cdot B, AB$

$$A\cap B=\{\,x\,|\,x\in A\text{ 且 }x\in B\,\}:$$

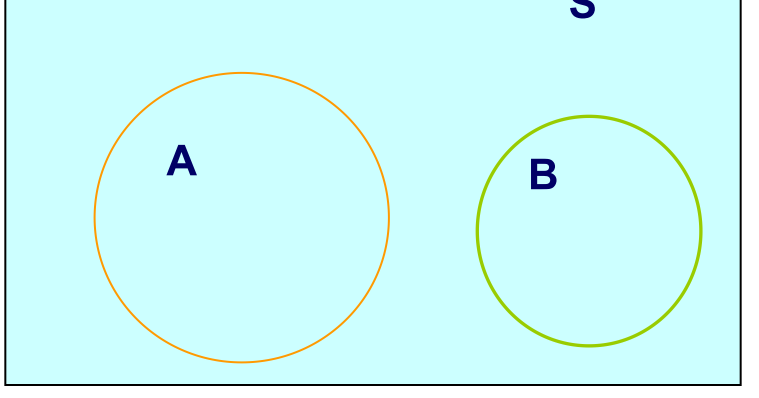
A与B同时发生。



$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i：A_1, A_2, \cdots A_n \text{至少有一发生}$$

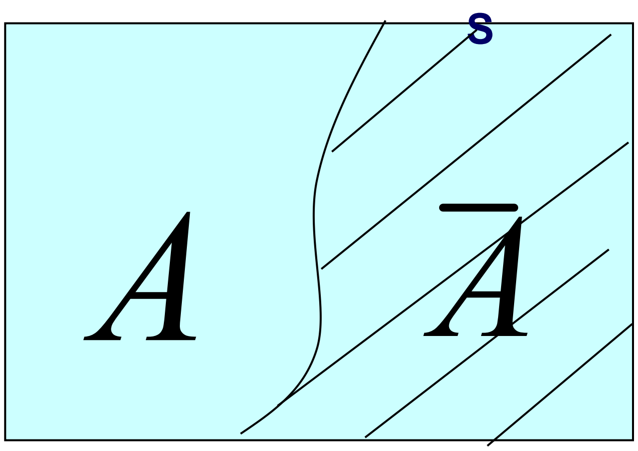
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i：A_1, A_2, \cdots A_n \text{同时发生}$$

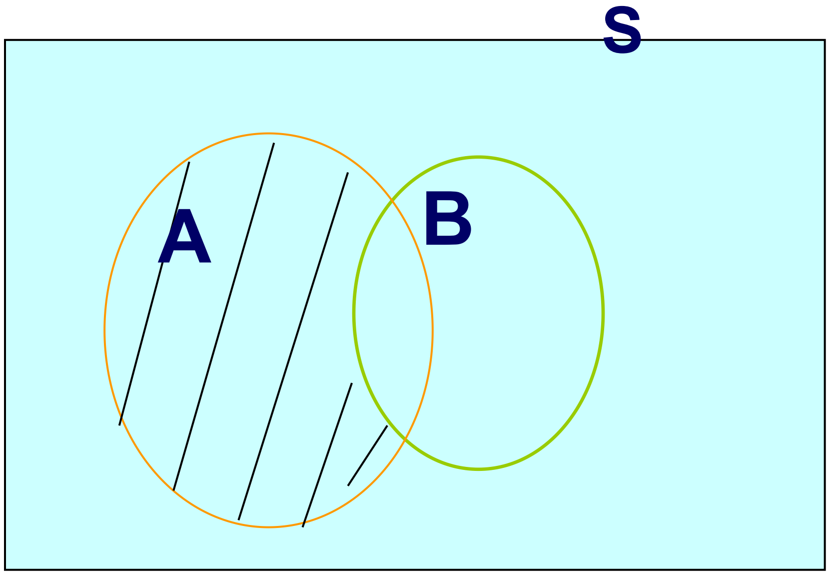
- 当AB= Φ时，称事件A与B是互不相容的，或互斥的.



A的逆事件记为$\bar{A}$, $\begin{cases} A \cup \bar{A} = S \\ A\bar{A} = \varnothing \end{cases}$，若$\begin{cases} A \cup B = S \\ AB = \varnothing \end{cases}$,

称A, B互逆（互为对立事件）





事件A对事件B的差事件：

$$A\,\overline{B} = A - B = \{\, x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B \,\}$$

“和”、“交”关系式——德摩根定律

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n;$$

例：设A={ 甲来听课 }，B={ 乙来听课 }，则：

$A\bigcup B=$ {甲、乙至少有一人来}

$A\bigcap B=$ {甲、乙都来}

$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\,\overline{B}=$ {甲、乙都不来}

$\overline{A}\bigcup\overline{B}=\overline{AB}=$ {甲、乙至少有一人不来}

概率中常有以下定义：由n个元件组成的系统，其中一个损坏，则系统就损坏，此时这一系统称为“串联系统”；若有一个不损坏，则系统不损坏，此时这一系统称为“并联系统”。

- 例： 由n个部件组成的系统，记

  - 串联系统：$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

  - 并联系统：$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

A_i ＝{第i个部件没有损坏}，i=1, 2, $\cdots$, n,

A＝{系统没有损坏}

§2 频率与概率

(一)频率

定义：记 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$;

其中 n_A —A发生的次数(频数)；

n—总试验次数。称 $f_n(A)$ 为A在这n次试验中发生的**频率**。

例：

- 中国男子国家足球队，“冲出亚洲”共进行了n次，其中成功了一次，在这n次试验中“冲出亚洲”这事件发生的频率为 $1/n$；

- 某人一共听了16次“概率统计”课，其中有12次迟到，记A={听课迟到}，则

$$f_n(A)=12/16=75\%$$

频率 $f_n(A)$ 反映了事件A发生的频繁程度。

例：2000年悉尼奥运会开幕前，气象学家对两个开幕候选日“9月10日”和“9月15日”的100年气象学资料分析发现，“9月10日”的下雨天数为86天，“9月15日”的下雨天数为22天. 即“9月10日”和“9月15日”的下雨频率分别为86％和22％，因此最后决定开幕日定为“9月15日”。

第二十七届2000悉尼夏季奥运会

频率的性质：

$1^\circ \quad 0 \le f_n(A) \le 1$

$2^\circ \quad f_n(S) = 1$

3° 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$两两互不相容，

则 $f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$

例：抛硬币出现的正面的频率

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

频率的重要性质：

$f_n(A)$ 随$\boldsymbol{n}$的增大渐趋稳定，记稳定值为$\boldsymbol{p}$.

(二) 概率

定义：对样本空间S中任一事件A，定义一个实数$P(A)$，如果满足以下三条：

（1）非负性： $P(A) \geq 0;$

（2）规范性： $P(S) = 1;$

（3）可列可加性：若 $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots,$

两两不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$

则称$P(A)$为事件A的概率。

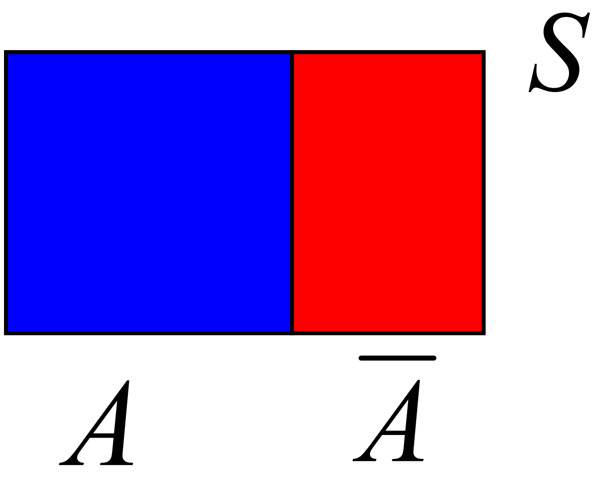
性质：$1^\circ \ P(\varnothing) = 0$

$$2^\circ \quad A_1, A_2, \ldots, A_n, A_i A_j = \varnothing, i \neq j,$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

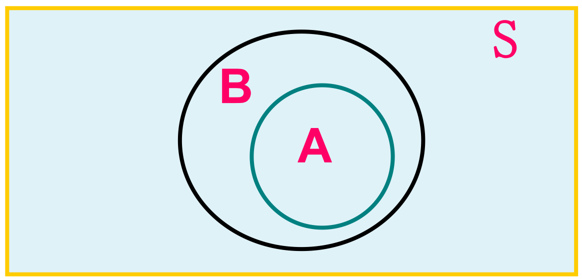
$$3^\circ \ P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

证：$\because A \cup \bar{A} = S \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1$



4° 若$A \subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

$\Rightarrow P(B) \ge P(A)$, 于是有 $P(A) \le P(S) = 1$

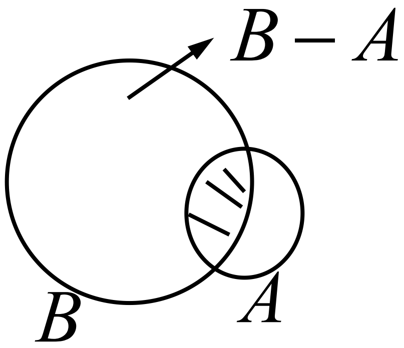


证$: B = A \cup (B-A)$ 不交并

$$\Rightarrow P(B) = P(A) + P(B-A)$$

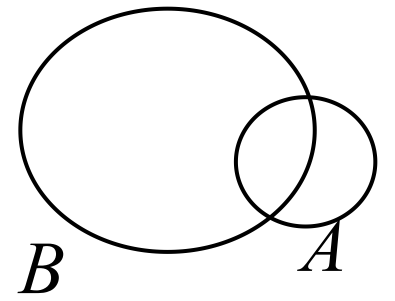
$$\Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$$

问题：一般情况下 $P(B-A)=?$



答案：$P(B-A)=P(B)-P(AB)$

5° 概率的加法公式：



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

证：$\because A \cup B = A \cup (B - A)$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

#5°的推广1：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

证：$P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A\cup B)+P(C)-P(AC\cup BC)$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)$$
$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

#5°的推广2（一般情形）：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例2.1：甲乙丙3人去参加某个集会的概率均为0.4，其中至少有两人参加的概率为0.3，都参加的概率为0.05，求3人中至少有一人参加的概率。

解：设A, B, C分别表示甲, 乙, 丙参加，由条件知

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0.4,$$

$$P(AB \cup AC \cup BC) = 0.3,$$

$$P(ABC) = 0.05.$$

由$0.3 = P(AB \cup AC \cup BC) = P(AB)$

$$+ P(AC) + P(BC) - 2P(ABC),$$

得 $$P(AB) + P(AC) + P(BC)$$

$$= 0.3 + 2P(ABC) = 0.4,$$

因此，

P(甲乙丙至少有一人参加）

$= P(A \cup B \cup C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB)$

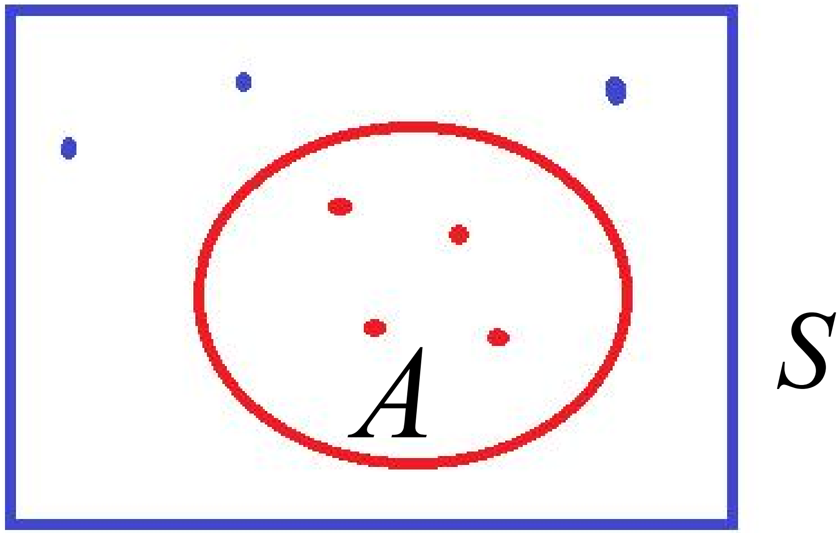
$- P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 0.85.$

§3 等可能概型（古典概型）

定义：若试验E满足:

- S中样本点有限(有限性)
- 出现每一样本点的概率相等(等可能性)

称这种试验为等可能概型(或古典概型)。



$$P(A)=\frac{A\text{中样本点个数}}{S\text{中样本点个数}}$$

例3.1：一袋中有8个球，其中3个为红球，5个为黄球，设摸到每一球的可能性相等。

（1）从袋中随机摸一球，记A={ 摸到红球 }，求P(A).

（2）从袋中不放回摸两球，记B={恰是一红一黄}，求P(B).

解：(1)

$$S=\{1,2,\cdots,8\},A=\{1,2,3\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{3}{8}$$

$$(2)P(B)=C_3^1C_5^1/C_8^2=\frac{15}{28}\approx 53.6\%$$

例3.2：有N件产品，其中D件是次品，从中不放回的取n件，记A_k＝{恰有k件次品}（k≤D)，求$P(A_k)$.

$$(D \le N, n \le N)$$

解：

$$P(A_k) = C_D^k C_{N-D}^{n-k} / C_N^n,\ k = 0, 1, \cdots, n$$

（注：当L>m 或 L<0时，记 $C_m^L = 0$）

例3.3：将n个不同的球，投入N个不同的盒中($n\leqslant N$)，设每一球落入各盒的概率相同，且各盒可放的球数不限，记A＝{ 恰有n个盒子各有一球 }，求P(A).

解：A:"每盒至多一球"

$$P(A)=\frac{N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)}{N^n}$$

$$=\frac{A_N^n}{N^n}$$

- 应用（生日问题）在一个n（≤365）人的班级里，至少有两人生日相同的概率是多少？

解：

记B＝{至少两人生日相同}

$$则P(B)=1-\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}$$

- 当$n=64$时，$p=0.997$
- 当$n=100$时，$p=0.9999997$

例3.4：（抽签问题）一袋中有a个红球，b个白球，记a＋b＝n．设每次摸到各球的概率相等，每次从袋中摸一球，不放回地摸n次。求第k次摸到红球的概率。

记$A_k=\{$第k次摸到红球$\}$，求$P(A_k)$.

将n个球依次编号为:

$$1,2,\ldots,n$$

其中前a号球是红球

解1：

视$1,2,\ldots,n$的每一个排列为一样本点,

则每一样本点等概率

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

-------与k无关

解2：视哪几次摸到红球为一样本点

每点出现的概率相等

$$\therefore P(A_k) = C_{n-1}^{a-1} / C_n^a = \frac{a}{a+b}$$

解3：将第k次摸到的球号作为一样本点，

由对称性，取到各球的概率相等

$$S=\{1,2,\ldots,n\}$$

$$A_k=\{1,2,\ldots,a\}$$

$$\Rightarrow P(A_k)=\frac{a}{n}=\frac{a}{a+b}$$

例3.5：（配对问题）一个小班有n个同学，编号为1, 2, …, n号，中秋节前每人准备一件礼物，相应编号为1, 2, … ,n。将所有礼物集中放在一起，然后每个同学随机取一件，求没有人拿到自己礼物的概率。

解：设A_i表示第i人拿到自己的礼物，i=1,2,…,n， A表示至少有一人拿到自己的礼物。

$$P(A)=P(A_1\cup\ldots\cup A_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\ldots A_n)$$

$$P(A_i)=(n-1)!/n!=1/n,\quad 共n项,$$

$$P(A_iA_j)=(n-2)!/n!=1/n(n-1),$$

$$i<j,\quad 共C_n^2项,$$

$$P(A_iA_jA_k)=(n-3)!/n!=1/3!C_n^3,$$

$$i<j<k,\quad 共C_n^3项,$$

$$P(A_1\ldots A_n)=1/n!$$

$$P(\text{没有人取到自己礼物}) = P(\bar{A})$$

$$= 1 - P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} -$$

$$C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \approx e^{-1} \approx 0.368 \quad \text{当n很大时}$$

人们在长期的实践中总结得到“概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的”（称之为实际推断原理）。

- 例3.6：某接待站在某一周曾接待12次来访，已知所有这12次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的?

解：假设接待站的接待时间没有规定，而各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的，那么，12次接待来访者都是在周二、周四的概率为

$$2^{12}/7^{12}=0.000\ 000\ 3.$$

现在概率很小的事件在一次试验中竟然发生了，因此，有理由怀疑假设的正确性，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为其接待时间是有规定的。

例3.7：某单位想从8名业务员中等概率地选取一名去外地出差一年. 现有一枚均匀硬币.

利用这枚硬币设计一个试验帮这个单位做决定.

解： 对这8名业务员分别编为$1\sim 8$号. 注意到抛一次硬币，只能等概率地决定两个结果，所以可以考虑不断地用二分法.

- 先抛一次硬币, 如果正面就在前4号里取, 否则就在后4号里取, 这样范围就缩短到4个号码中.
- 再抛一次硬币, 如果正面就在这4号的前2号里取, 否则就在这4号的后2号里取. 范围就缩短到2个号码中.
- 最后再抛一次硬币, 如果正面就取这2号的前1号, 否则就取这2号的后1号.

归纳起来，就是抛硬币三次，样本空间为

$S = \{$正正正, 正正反, 正反正, 正反反,

反正正, 反正反, 反反正, 反反反$\}$.

这是等可能概型.

对应这8个样本点，我们分别取1,2,...,8号.

→ 取 3号

正 反 正

§4 条件概率

例4. 1：一个家庭中有两个小孩，已知至少一个是女孩，问两个都是女孩的概率是多少？

（假定生男生女是等可能的）

解：由题意，样本空间为

$S=\{(男，男),(男，女),(女，男),(女，女)\}$

A 表示事件“至少有一个是女孩”，

$A=\{(男，女),(女，男),(女，女)\}$

$B=\{(女，女)\}$

由于事件A已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而事件B包含的基本事件只占其中的一种，所以有

$$P(B|A) = \frac{1}{3}$$

$P(B \mid A)$表示A发生的条件下,B发生的条件概率

在这个例子中，若不知道事件A已经发生的信息，那么事件发生的概率为

$$P(B)=\frac{1}{4}$$

这里 $P(B)\neq P(B|A)$

其原因在于事件 A 的发生改变了样本空间，使它由原来的 S 缩减为 $S_A=A$，而 S_A 是在新的样本空间中由古典概率的计算公式而得到的 $P(B|A)$

例4.2：有一批产品，其合格率为90%，合格品中有95%为优质品，从中任取一件，记A={取到一件合格品}，

B={取到一件优质品}.

则 $P(A)=90\%$ 而 $P(B|A)=95\%$.

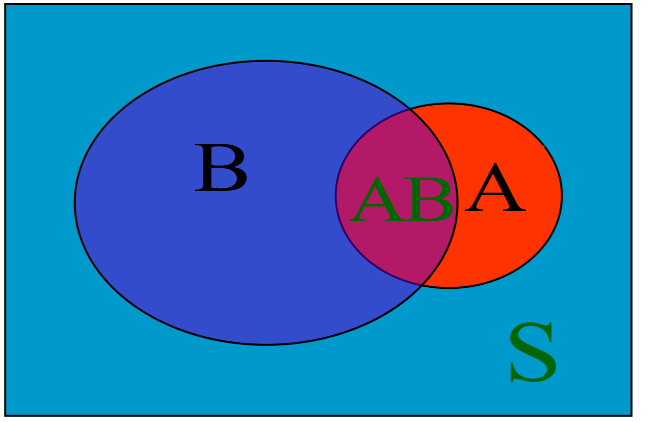
1. P(A)是A在整批产品中所占的概率比例

2. P(B|A)是B在A中所占的概率比例

3. 可将P(A)记为P(A|S)，P(A)也可视为条件概率.

一、条件概率定义

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad P(A)\neq 0$$



性质：$P(.|A)$是概率

(1)非负性：$P(B|A)\geq 0;$

(2)规范性：$P(S|A)=1$

(3)可列可加性：$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$，两两互斥

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid A)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid A)$$

P(.|A)具有概率的所有性质。如：

$$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)$$

$$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$$

$$B\supset C\Rightarrow P(B|A)\geq P(C|A)$$

条件概率含义:

设$P(A)>0$.独立重复进行随机试验直到事件A发生为止, 记录最后一次结果. 这样的随机试验称为一次新随机试验, 对应的概率用P_A表示.

对$B\subset S$,有

$$P_A(B)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\text{前}n-1\text{次试验}A\text{未发生, 第}n\text{次}A\text{发生且}B\text{发生})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[1-P(A)]^{n-1}P(AB)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B\mid A)$$

也就是新随机试验对应的概率P_A就是条件概率$P(\cdot\mid A)$

例4.3：天气很好，小王想带家人去千岛湖玩，又想到天目山玩．他有一枚硬币，但不知道这枚硬币出现正面的概率．利用这枚硬币设计一个试验帮他做决定，使得最后他等概率地去千岛湖和天目山．

解： 抛硬币一次，设出现正面的概率是p, 出现反面的概率是$1-p$. 独立抛硬币两次，样本空间

$$S=\{(正,正),(反,反),(正,反),(反,正)\}.$$

令$B_1=\{(正,反)\}, B_2=\{(反,正)\}, B=B_1\cup B_2$.

则$P(B_1)=P(B_2)=p(1-p), P(B_1|B)=P(B_2|B)=1/2$.

于是可以设计这样的试验：

独立重复抛两次硬币，一直到出现结果为(正, 反)或(反, 正)为止. 如果是(正, 反)就去千岛湖，如果是(反, 正)就去天目山.

例4. 4：某单位想从6名业务员中等概率地选取一名去外地出差一年. 现有一枚均匀硬币. 利用这枚硬币设计一个试验帮这个单位做决定.

解： 对这6名业务员分别编为$1\sim6$号.

如能实现$1,2,\ldots,8$中等概率取一个数, 则条件概率

$P(\cdot\mid\{1,2,\ldots,6\})$为等概率的在$1,2,\ldots,6$中取一个数.

于是，可以这样试验：

独立重复抛三次硬币, 直到结果不是“反反正”和“反反反”, 因此最后结果是：正正正，正正反, 正反正, 正反反, 反正正, 反正反, 中的某一个, 对应的取$1,2,\ldots,6$号.

二、乘法公式

当下面的条件概率都有意义时：

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2)$$

$$\cdots P(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1})$$

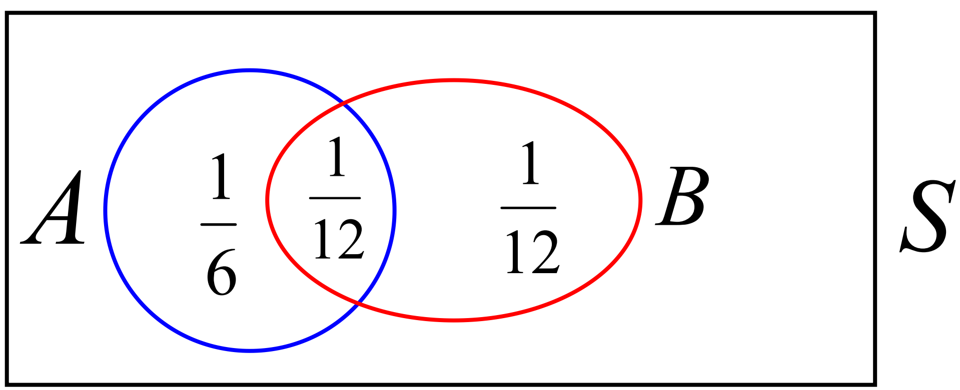
例4.5: $P(A)=1/4, P(B|A)=1/3,$

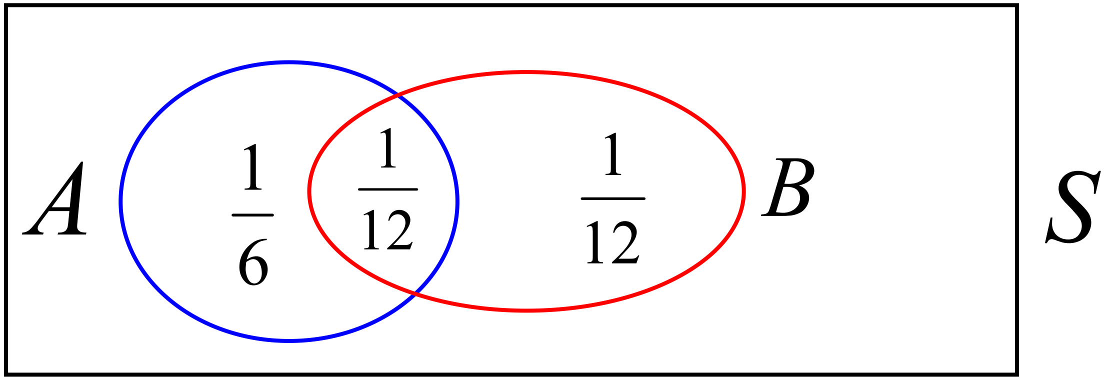
$P(A|B)=1/2$,求 $P(A\cup B), P(\bar{A}|A\cup B)$

解: $P(AB)=P(A)P(B|A)=1/12$

$$P(AB)=P(A|B)P(B)\Rightarrow P(B)=1/6$$

于是:





所以：$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

$$P(\overline{A} \mid A \cup B) = 1 - P(A \mid A \cup B) = 1 - \frac{1/4}{1/3} = \frac{1}{4}$$

例4.6：一盒中有5个红球，4个白球，采用不放回抽样，每次取一个，取4次，

（1）已知前两次中有一次取到红球，求前两次中恰有一次取到红球的概率；

（2）已知第4次取到红球，求第1，2次也取到红球的概率。

解：A_i表示第i次取到红球，i=1,2,3,4，B表示前两次中有一次取到红球，C表示前两次中恰有一次取到红球的概率。则

$$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{P(C)}{1-P(\bar{B})}=\frac{C_4^1C_5^1/C_9^2}{1-C_4^2/C_9^2}=\frac{2}{3}$$

$$P(A_1A_2|A_4)=\frac{P(A_1A_2A_4)}{P(A_4)}=\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1)}$$

$$=\frac{C_5^3/C_9^3}{5/9}=\frac{3}{14}$$

- 例4.7：某厂生产的产品能直接出厂的概率为70%，余下的30%的产品要调试后再定，已知调试后有80%的产品可以出厂，20%的产品要报废。求该厂产品的报废率。

解：设 A={生产的产品要报废}

B={生产的产品要调试}

已知P(B)=0.3，P(A|B)=0.2，

$$A \subset B, A = AB,$$

$$P(A) = P(AB)$$

$$= P(B)P(A|B) = 0.3 \times 0.2 = 6\%$$

例4.8：某行业进行专业劳动技能考核，一个月安排一次，每人　最多参加3次；某人第一次参加能通过的概率为60%；如 果第一次未通过就去参加第二次，这时能通过的概率为80%；如果第二次再未通过，则去参加第三次，此时能通过的概率为90%。求这人能通过考核的概率。

解：设 A_i={ 这人第i次通过考核 }，

i=1, 2, 3

A={ 这人通过考核 }，

$$A = A_1 \cup \overline{A}_1 A_2 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$$

$$P(A)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2\mid\bar{A}_1)\cdot$$

$$+P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=0.60+0.4\times0.8+0.4\times0.2\times0.9$$

$$=0.992$$

$$P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)$$

$$=1-P(A_2\mid\bar{A}_1)$$

$$=1-0.8=0.2$$

亦可：

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

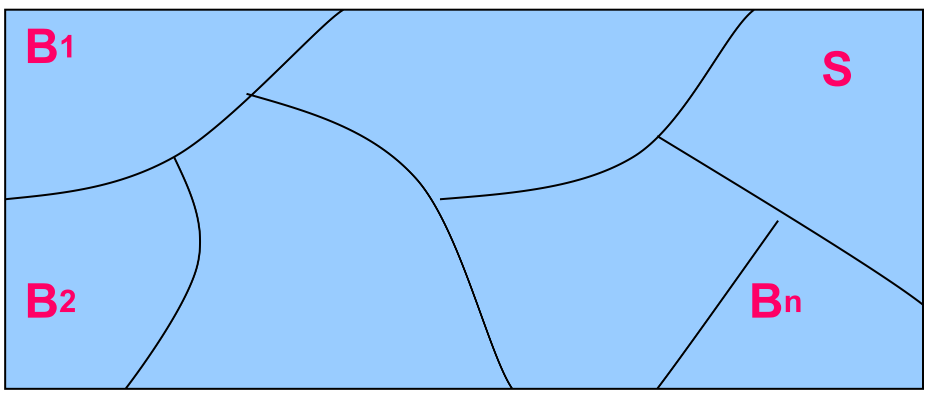
$$=1-0.4\times0.2\times0.1=0.992$$

三、全概率公式与Bayes公式

定义： 称$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个**划分**若：

(i) 不漏 $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$

(ii) 不重 $B_i B_j = \varnothing, \quad i \neq j$



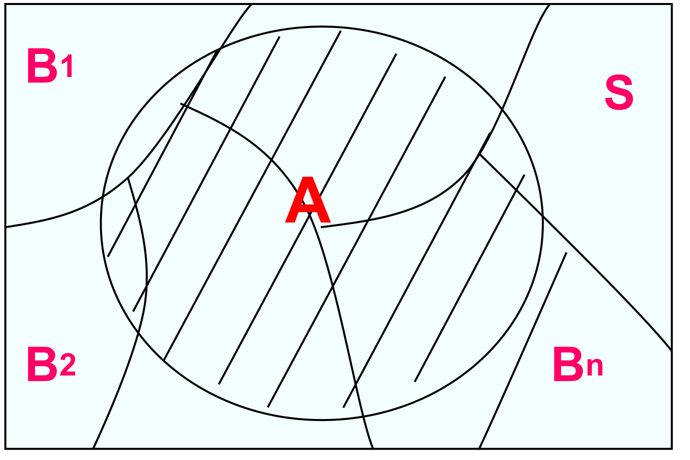
定理：

设$B_1,B_2,\ldots,B_n$为样本空间S的一个划分，

$P(B_i)>0$，$i=1,2,\ldots,n$；则称：

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)\cdot P(A\mid B_j)$$

为全概率公式



证明 $\because A = AS = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$

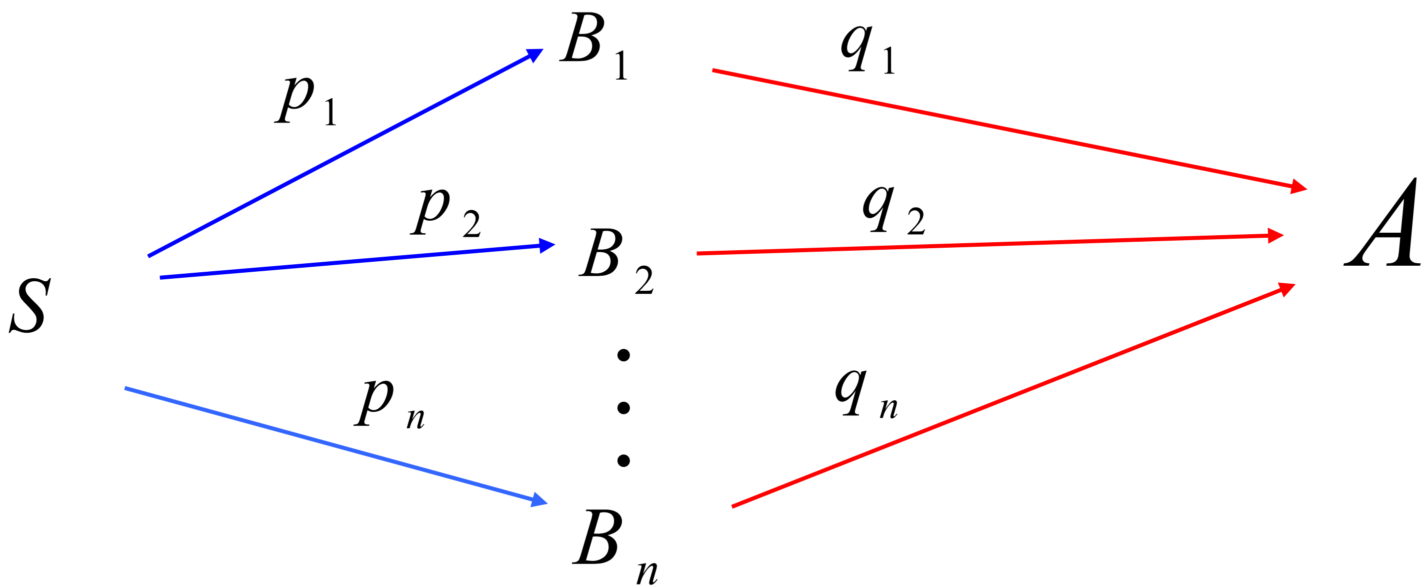
$$\therefore P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(AB_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P(A \mid B_j)$$

AB_i与AB_j不相容$(i \neq j)$

注：在运用全概率公式时，一个关键是构造一组合适的划分。

设$P(B_j)=p_j, P(A|B_j)=q_j, j=1,2,\ldots,n$



$$\boxed{\text{则 } P(A)=\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}$$

定理：接上面全概率公式的条件，

且P(A)>0, 则

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$$

称此式为**Bayes公式**。

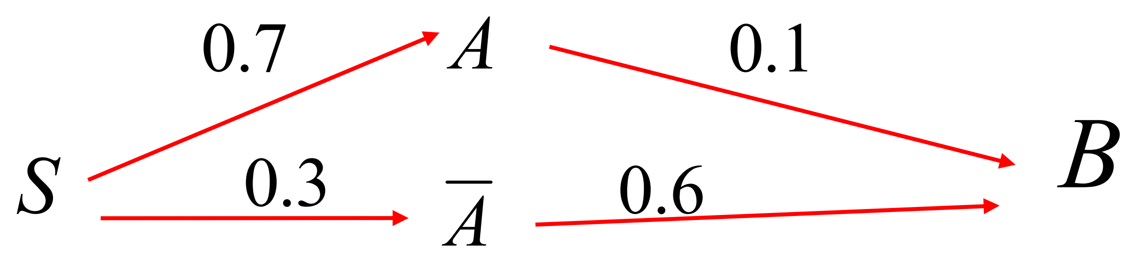
例4.9：一单位有甲、乙两人，已知甲近期出差的概率为70%，若甲出差，则乙出差的概率为10%；若甲不出差，则乙出差的概率为60%。

(1)求近期乙出差的概率；

(2)若已知乙近期出差在外，求甲出差的概率。

解：设A={甲出差}，B={乙出差}

已知 $P(A)=0.70,\quad P(B|A)=0.10,\quad P(B|\bar{A})=0.60$



(1)由全概率公式：

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=0.7\times0.1+0.3\times0.6=25\%$$

(2)由Bayes公式：

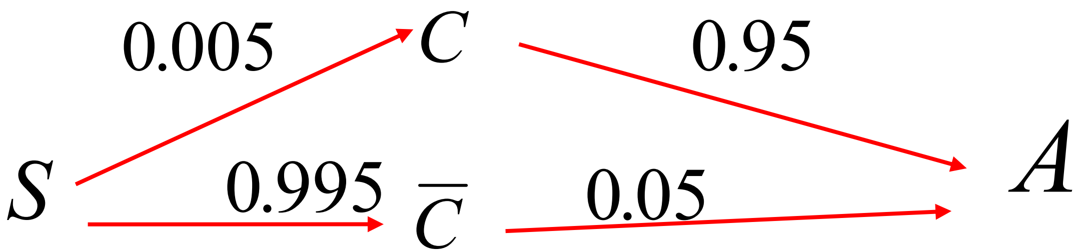
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{7}{25}$$

例4.10：根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有5%的假阳性及5%的假阴性：即

设A={试验反应是阳性}，C={被诊断患有癌症}

则有：$P(A\mid\overline{C})=5\%,P(\overline{A}\mid C)=5\%$.已知某一群体P(C)=0.005，问这种方法能否用于普查？

解：

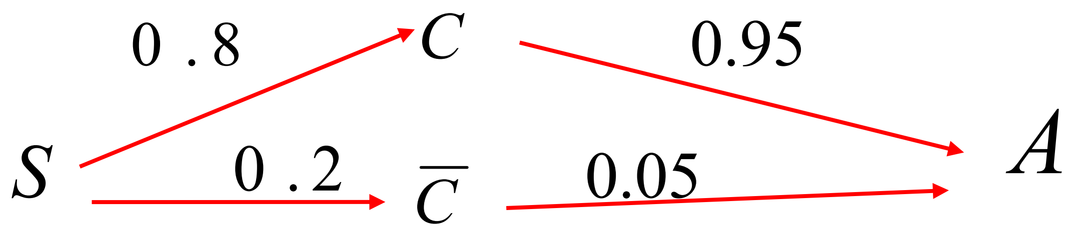


由 B ayes公式：

$$P(C\mid A)=\frac{P(C)\cdot P(A\mid C)}{P(C)P(A\mid C)+P(\overline{C})P(A\mid \overline{C})}=0.087$$

若用于普查，100个阳性病人中被诊断患有癌症的大约有8.7个，所以不宜用于普查。

若$P(C)$很大，比如$P(C)=0.8$,则



$$P(C\mid A)=\frac{0.8\times 0.95}{0.8\times 0.95+0.2\times 0.05}=0.987$$

说明此方法在医院可用 

§5 独立性

例：有10件产品，其中8件为正品，2件次品。从中取2次,每次取1件，设A_i={第i次取到正品}，i=1,2

不放回抽样时，$P(A_2 | A_1) = \frac{7}{9} \neq P(A_2) = \frac{8}{10}$

放回抽样时，$P(A_2 | A_1) = \frac{8}{10} = P(A_2)$

即放回抽样时，A_1的发生对A_2的发生概率不影响。同样，A_2的发生对A_1的发生概率不影响。

定义：设A，B为两随机事件，如果

P(AB)=P(A)*P(B)，则称A，B 相互独立.

若 $P(A)\neq 0, P(B)\neq 0$，

P(AB)=P(A)P(B)等价于P(B|A)=P(B)，

P(AB)=P(A)P(B)也等价于P(A|B)=P(A).

A, B相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}, B$相互独立

$\Leftrightarrow A, \overline{B}$相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}, \overline{B}$相互独立

证：$\because$ 当$P(AB) = P(A)P(B)$时

$$P(A\overline{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

$$= P(A)\left[1 - P(B)\right] = P(A)\,P(\overline{B})$$

定义：

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个随机事件，若对$2 \le k \le n$，

均有：$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right)$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立

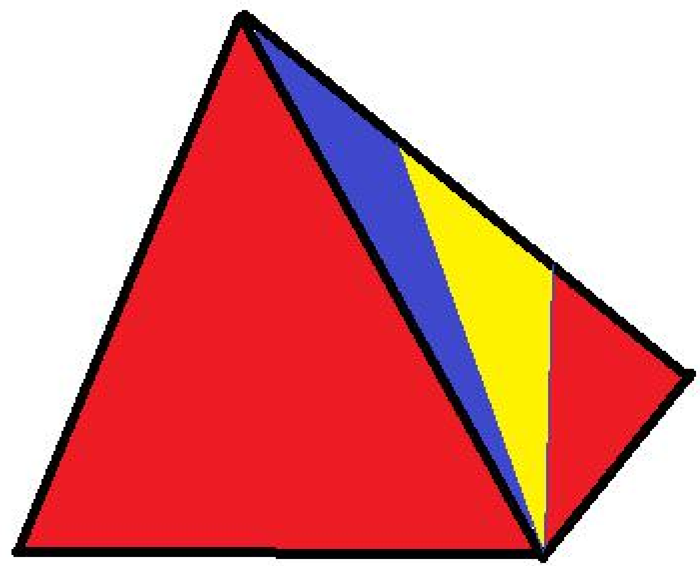
例5.1：有一个正四面体，现在给一面漆上红色，一面漆上黄色，一面漆上蓝色，还有一面漆上红黄蓝三色．现在任取一面.令

$A=$"这面含红色"，$B=$"这面含黄色"，

$C=$"这面含蓝色"。

问:A,B,C是否两两独立？

是否相互独立？



解：对这四面分别标号为1,2,3,4.

则$S=\{1,2,3,4\}$,

$$A=\{1,4\}, B=\{2,4\}, C=\{3,4\}$$

$$AB=AC=BC=ABC=\{4\}$$

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/2$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=P(ABC)=1/4$$

$\therefore$ $\boxed{\text{两两独立}}$,即 $P(AB)=P(A)P(B),$

$$P(AC)=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=P(B)P(C)$$

但$\boxed{\text{不是相互独立}}$

$\because P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$

注意：

1° 两两独立不能 $\Rightarrow$ 相互独立

2° 实际问题中，常常不是用定义去验证事件的独立性，而是由实际情形来判断其独立性。

设一个试验是由一系列子试验组成，

独立试验： 指任一次子试验出现的结果都不影响其他各子试验出现的结果；

例如观察十期彩票的开奖结果，是独立试验.

重复试验： 如果各子试验是在相同条件下进行的。

例5. 2: $P(A)=0.5, P(B)=0.4$, 求下列情况下$P(A\cup B)$

（1） A与B独立, （2） A与B不相容,

(3) $A\supset B$, (4) $P(AB)=0.3$.

解: (1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.7$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.9$

(3) $P(A\cup B)=P(A)=0.5$

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6$

例5.3：甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为$p, p \geqslant \frac{1}{2}$,问对甲而言，采用三局二胜制有利，还是采用五局三胜制有利？（设各局胜负相互独立）

解：设$A_i = \{第i局甲胜\}$

$$\Rightarrow P(A_i) = p,\ i = 1,2,\cdots,5$$

再设$A = \{甲胜\}$

(1) 三局二胜制：

$$P(A) = P\left(A_1A_2 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3\right)$$

$$= p^2 + 2p^2(1-p) \overset{记为}{=} p_1$$

(2)五局三胜制：

$$P(A)=P\{A_1A_2A_3\cup(\text{前三次有一次输})A_4$$

$$\cup(\text{前四次有两次输})A_5\}$$

$$=p^3+C_3^1(1-p)p^3+C_4^2(1-p)^2p^3\overset{\text{记为}}{=}p_2$$

$$p_2 - p_1 = 3p^2(p-1)^2(2p-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_2 > p_1，当 p > \dfrac{1}{2} \\ p_2 = p_1，当 p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

例5.4：有5个独立元件构成的系统(如图1)，设每个元件能正常运行的概率为p，求系统正常运行的概率。

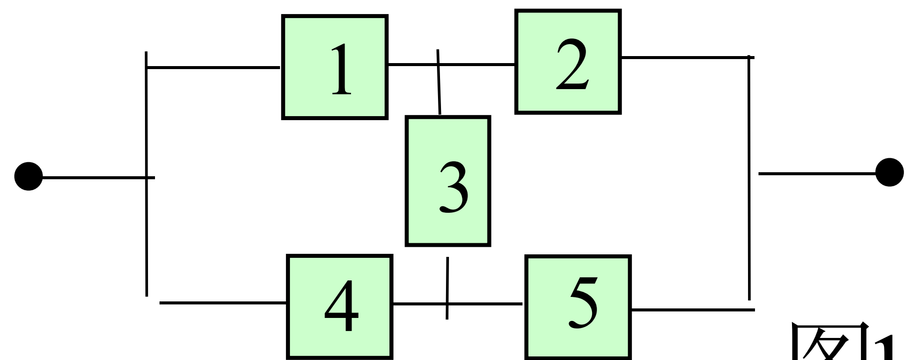
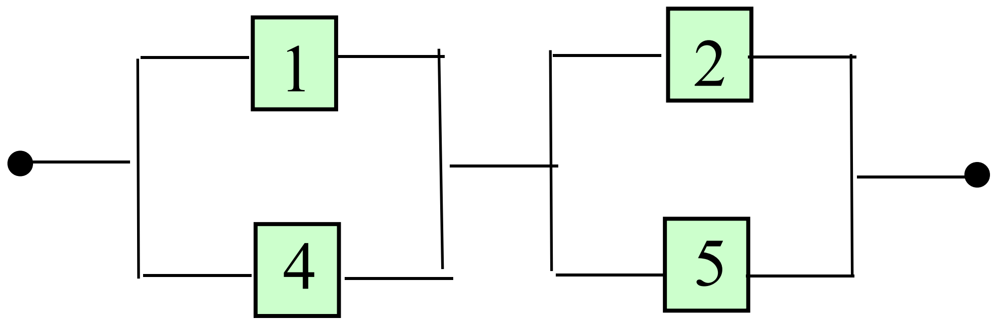


图1

解：设$A_i=\{$第i个元件运行正常$\}, i=1,2,3,4,5$

$$A=\{\text{系统运行正常}\}$$

$$P(A)=P(A_3)\cdot P(A|A_3)+P(\overline{A}_3)\cdot P(A|\overline{A}_3)$$



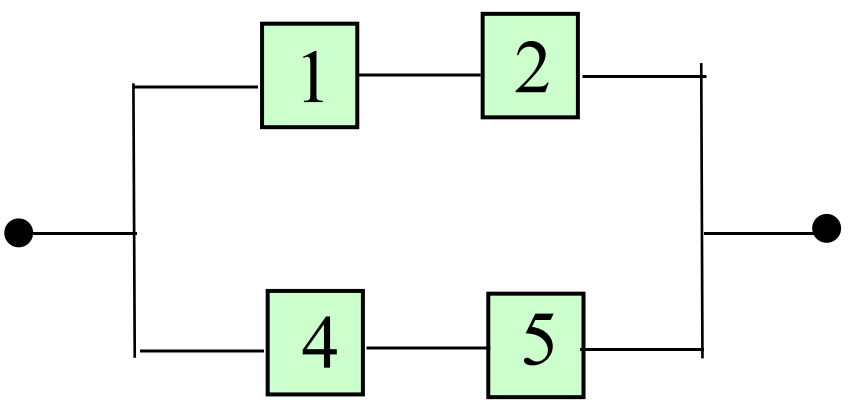
$$p_1 \triangleq P(A|A_3)=P\big((A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5)\big)$$

$$=[P(A_1\cup A_4)]^2=(2p-p^2)^2$$

$$p_2 \triangleq P(A \mid \overline{A}_3) = P\left(A_1 A_2 \cup A_4 A_5\right) = 2p^2 - p^4$$

$$P(A) = p(2p - p^2)^2 + (1-p)(2p^2 - p^4)$$

$$= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$



例5.5：一袋中有编号为1,2,3,4共4个球，采用放回抽样，每次取一球，共取2次，记录号码之和，这样独立重复进行试验，求“和等于3”出现在“和等于5”之前的概率。

解：设A表示“和等于3”出现在“和等于5”之前，

B表示第一次号码之和为3，

C表示第一次号码之和为5，

D表示第一次号码之和既不为3也不为5

$$P(B)=\frac{2}{16},\quad P(C)=\frac{4}{16},\quad P(D)=\frac{10}{16}$$

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(A|C)P(C)+P(A|D)P(D)$$

$$=\frac{2}{16}\times 1+\frac{4}{16}\times 0+\frac{10}{16}\times P(A|D)$$

$$\Rightarrow \quad P(A)=\frac{1}{3}.$$

$$P(A|D)=P(A)$$

在第一次和不等于3或5的情况下求A的条件概率，相当于重新考虑A的概率。

例5.6：某技术工人长期进行某项技术操作，他经验丰富，因嫌按规定操作太过烦琐，就按照自己的方法进行，但这样做有可能发生事故。设他每次操作发生事故的概率为p，p>0，但很小很小，他独立重复进行了n次操作， 求(1) n次都不发生事故的概率；(2) 至少有一次发生事故的概率。

解：设A={n次都不发生事故},B={至少有一次发生事故},Ci={第i次不发生事故},i=1,2,…,n

则$C_1,\ldots,C_n$相互独立，$P(C_i)=1-p$

$$P(A)=P(C_1\ldots C_n)=(1-p)^n$$

$$P(B)=1-P(A)=1-(1-p)^n,$$

注意到$\lim\limits_{n\to\infty} P(B)=1$

上式的意义为："小概率事件"在大量独立重复试验中"至少有一次发生"几乎是必然的。

例5.7. 设某地每天发生雾霾的概率为0.2. 在雾霾天气, 该地各居民独立地以概率0.2戴口罩, 在没有雾霾的时候各居民独立地以概率0.01戴口罩.

(1) 某天在该地任选一居民, 求他戴口罩的概率;

(2) 若选n人, 求他们都戴口罩的概率;

(3) 若选n人发现他们都戴口罩, 求这一天发生雾霾的概率. (这里n为正整数.)

解：

令$C=\{$这一天雾霾$\}$, $A_i=\{$第i个人带口罩$\}$

(1)

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dr, "0.2"] & \\
S \arrow[ur, "0.2"] \arrow[dr, "0.8"'] & & A_1 \\
 & \bar{C} \arrow[ur, "0.01"'] &
\end{tikzcd}
$$

由全概率公式:

$$P(A_1)=P(C)P(A_1|C)+P(\bar{C})P(A_1|\bar{C})=0.048$$

(2)所求概率为$P(A_1A_2\ldots A_n)$.

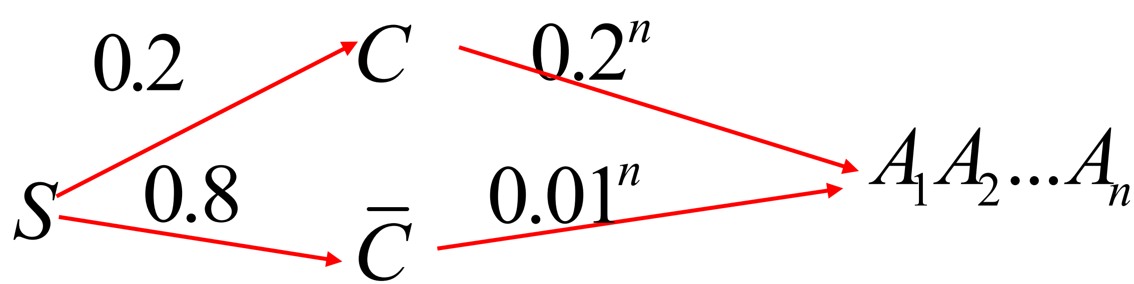
有人认为$A_1,A_2,\ldots,A_n$相互独立，所以

$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\ldots P(A_n)=0.048^n$.对吗？

直观地看，如果$A_1,A_2,\ldots,A_{n-1}$发生，也就是前面$n-1$个人都带口罩，那么那天雾霾的概率就会很大，从而第n个人带口罩的概率也会很大，也就是A_n发生的概率就会变大. 所以$A_1,A_2,\ldots A_n$不太会独立.

举一个特例，如果$P(A_i \mid C)=1, P(A_i \mid \overline{C})=0$.也就是只要雾霾天，所有人带口罩；只要不是雾霾天那么没人带口罩. 在这种情况下，只要看看一个居民戴口罩的情况，就可以判断是否雾霾天. 如果他戴口罩，那么雾霾，从而所有人戴口罩；如果他不戴口罩，那么非雾霾，从而所有人不戴口罩. 因此$A_1, A_2, \ldots A_n$不会独立.

那么$P(A_1A_2\ldots A_n)$该怎么计算呢？注意到所有人面对的是同样的天气，所以可以按照是否雾霾天作一划分并用全概率公式求得.



由全概率公式：

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(C)P(A_1A_2\ldots A_n|C)+P(\bar{C})P(A_1A_2\ldots A_n|\bar{C})$$

$$=0.2\times0.2^n+0.8\times0.01^n$$

(3)

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & C \arrow[dr, "0.2^n"] & \\ S \arrow[ur, "0.2"] \arrow[dr, "0.8"'] & & A_1A_2\ldots A_n \\ & \bar{C} \arrow[ur, "0.01^n"'] & \end{tikzcd}$$

由Bayes公式，所求概率为：

$$P(C\,|\,A_1A_2\ldots A_n)=\frac{P(C)P(A_1A_2\ldots A_n|C)}{P(C)P(A_1A_2\ldots A_n|C)+P(\bar{C})P(A_1A_2\ldots A_n|\bar{C})}$$

$$=\frac{0.2\times0.2^n}{0.2\times0.2^n+0.8\times0.01^n}=\frac{1}{1+4\times0.05^n},\quad \text{记为}p_n$$

则p_n关于n单调递增，$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=1$. **符合直观！**

$$p_1=0.8333,\ p_2=0.9901,\ p_3=0.9995$$

（一）贝叶斯公式介绍

贝叶斯公式，解决的是由果溯因的推理.

假设共有n种两两互斥的原因$B_1,B_2,\ldots,B_n$会导致A发生.当结果A发生时，我们就会追溯A发生的原因，需要计算由于原因B_j导致A发生的概率是多大？

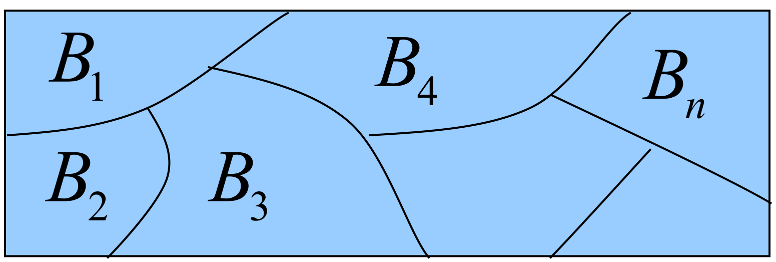
这个概率就是$P(B_j \mid A)$，可由贝叶斯公式给出.

通常，我们会找那个最有可能发生的原因，也就是找B_j，使得$P(B_j \mid A)$是$P(B_1 \mid A), P(B_2 \mid A)\ldots, P(B_n \mid A)$中最大的一个. 这个推断方法称之为**贝叶斯方法**.

定义: 称$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分，若

(i) 不漏 $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$,

(ii) 不重 $B_i B_j = \varnothing, \ i \neq j.$



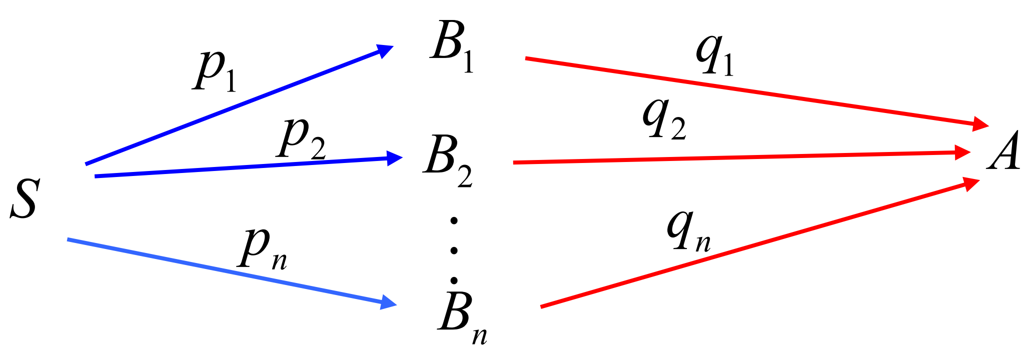
S

设$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分且$P(B_i) > 0$. 对$P(A) > 0$

有**Bayes公式**:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)} = \frac{p_i q_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}$$

设$P(B_j) = p_j, P(A \mid B_j) = q_j, j = 1, 2, \ldots, n$.



$P(B_i)$先验概率

$P(B_i \mid A)$后验概率

贝叶斯公式由英国数学家托马斯·贝叶斯(1702-1762)提出. 不过贝叶斯在世时并没有公开发表这一重大发现. 而是他去世后两年才由他的朋友理查德·普莱斯整理遗稿时发现并帮助发表的.

贝叶斯方法的应用：

·疾病诊断

·垃圾邮件过滤

·信号检测

·侦破案件

·人工智能

·贝叶斯统计

……

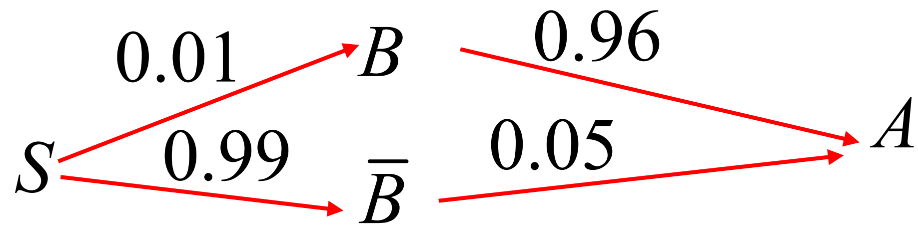
(二)贝叶斯公式的一些应用

例1.(疾病诊断)某种疾病的诊断试验有5%的假阳性和4%的假阴性. 即令$B=\{$患有此种疾病$\}$, $A=\{$试验反应是阳性$\}$, 则有$P(A\mid\overline{B})=0.05, P(\overline{A}\mid B)=0.04$. 已知此病发病率是0.01.

(1)当试验反应是阳性时, 此人患有此种疾病的概率为多少?

(2)为提高准确率, 通常会对第一次试验阳性的人再做一次独立的检查. 如果这两次都是阳性, 问此人患有此种疾病的概率为多少?

解: (1) $B=\{$患有此种疾病$\}$, $A=\{$试验反应是阳性$\}$



由Bayes公式:

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})}$$

$$=\frac{0.01\times 0.96}{0.01\times 0.96+0.99\times 0.05}=0.1624$$

(2) $B=\{$患有此种疾病$\}$, 令$A_i=\{$第i次试验阳性$\}$,

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "0.96^2"] & \\
S \arrow[ur, "0.01"] \arrow[dr, "0.99"'] & & A_1A_2 \\
 & \overline{B} \arrow[ur, "0.05^2"'] &
\end{tikzcd}$$

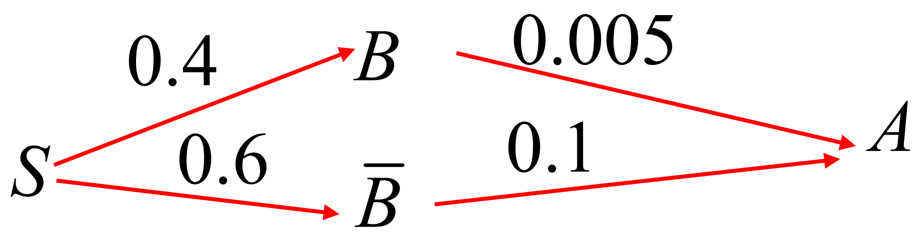
由Bayes公式:

$$P(B\mid A_1A_2)=\frac{P(B)P(A_1A_2\mid B)}{P(B)P(A_1A_2\mid B)+P(\overline{B})P(A_1A_2\mid\overline{B})}$$

$$=\frac{0.01\times0.96^2}{0.01\times0.96^2+0.99\times0.05^2}=0.7883$$

例2.（垃圾邮件过滤）某人的邮箱收到正常邮件的概率为0.4,垃圾邮件的概率为0.6. 正常邮件里包含词语“免费”的概率为0.005,垃圾邮件里包含词语“免费”的概率为0.1. 现在此人设置把含有词语“免费”的邮件自动过滤到垃圾箱中. 问过滤到垃圾箱中的邮件确实是垃圾邮件的概率为多少？

解： 令$A=\{$被过滤到垃圾箱中$\}$，$B=\{$是正常邮件$\}$，



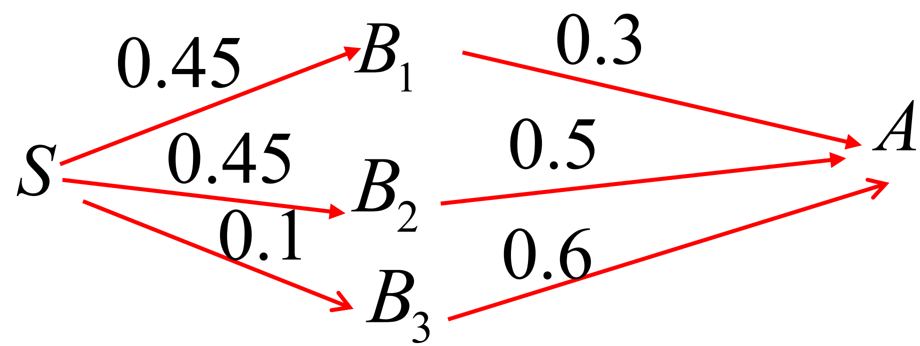
由Bayes公式：

$$P(\overline{B}\mid A)=\frac{P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})}$$

$$=\frac{0.6\times0.1}{0.4\times0.005+0.6\times0.1}=0.9677$$

例3.（最大后验概率准则）小王参加一个棋类比赛. 其中45%为一类棋手, 小王赢他们的概率为0.3; 45%为二类棋手, 小王赢他们的概率为0.5; 其余为三类棋手, 小王赢他们的概率为0.6. 从这些棋手中任选一人与小王比赛. 如果小王获胜了，你觉得此人最有可能是哪类棋手?

解： 令$B_i=\{$此人是i类棋手$\}$，$i=1,2,3, A=\{$小王赢$\}$，



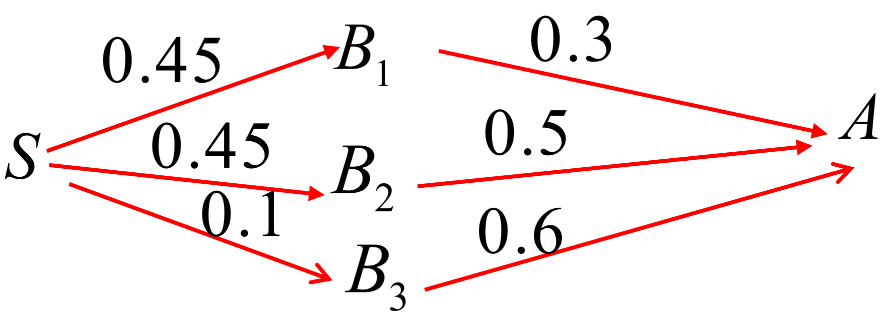
由Bayes公式:

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+P(B_3)P(A\mid B_3)}$$

$$P(B_1 \mid A)=\frac{0.45\times0.3}{0.45\times0.3+0.45\times0.5+0.1\times0.6}=0.3214$$

$$P(B_2 \mid A)=\frac{0.45\times0.5}{0.45\times0.3+0.45\times0.5+0.1\times0.6}=0.5357$$

$$P(B_3 \mid A)=\frac{0.1\times0.6}{0.45\times0.3+0.45\times0.5+0.1\times0.6}=0.1429$$



$\because P(B_2 \mid A)<P(B_1 \mid A)$

且$P(B_2 \mid A)<P(B_3 \mid A)$,

$\therefore$此人最有可能是二类棋手

课件待续!

THE END