第二章 随机变量及其分布

关键词：

随机变量

概率分布函数

离散型随机变量

连续型随机变量

随机变量的函数

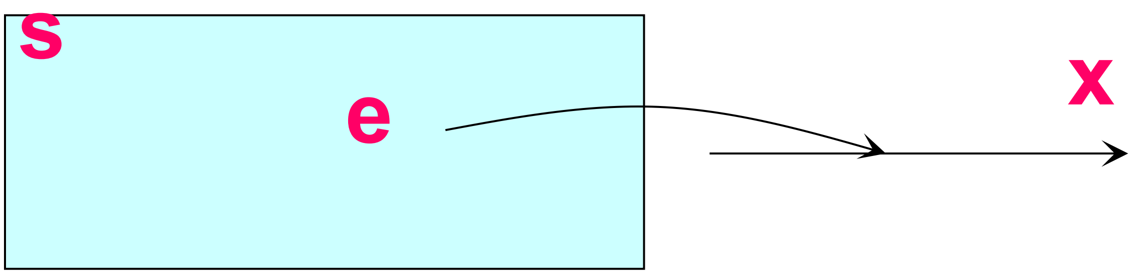
§1　随机变量

常见的两类试验结果：

示数的——降雨量；
候车人数；
发生交通事故的次数…

示性的——明天天气（晴，云…）；
化验结果（阳性，阴性）…

中心问题：将试验结果数量化



X=X(e)为S上的单值函数

定义：设随机试验的样本空间为 $S=\{e\}$，若 $X=X(e)$ 为定义在样本空间 S 上的实值单值函数，则称 $X=X(e)$ 为随机变量。

- 一般采用大写英文字母 X, Y, Z 来表示随机变量
- 引入随机变量的目的是用来描述随机现象

一般的,若I是一个实数集合,

则$\{X \in I\}$为事件$\{e: X(e) \in I\}$

常见的两类随机变量 $\begin{cases} \text{离散型的} \\ \text{连续型的} \end{cases}$

例1.1：掷硬币3次，出现正面的次数记为X.

样本点	TTT	TTH	THT	HTT	HHT	HTH	THH	HHH
X的值	0	1	1	1	2	2	2	3

$$P\{X=0\}=P\{TTT\}=1/8$$

$$P\{X=1\}=P\{TTH,THT,HTT\}=3/8$$

$$P\{X\le 1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=1/2$$

X	0	1	2	3
p	1/8	3/8	3/8	1/8

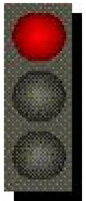
§2　离散型随机变量及其分布

定义：取值至多可数的随机变量为**离散型的随机变量。**概率分布(分布律)为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

$$p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

概率分布律 $\begin{cases} \text{写出所有可能取值;} \\ \text{写出每个取值相应的概率.} \end{cases}$



例2.1：某人骑自行车从学校到火车站，一路上要经过3个独立的交通灯，设各灯工作独立，且设各灯为红灯的概率为p，$0<p<1$，以X表示首次停车时所通过的交通灯数，求X的概率分布律。

解：设A_i={第i个灯为红灯}，则$P(A_i)=p$，

$i=1, 2, 3$ 且A_1, A_2, A_3相互独立。

$$P(X=0)=P(A_1)=p \;;$$

$$P(X=1)=P(\overline{A}_1 A_2)=(1-p)p \;;$$

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3)=(1-p)^2 p \;;$$

$$P(X=3)=P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3)=(1-p)^3 \;;$$

X	0	1	2	3
p	p	$p(1-p)$	$(1-p)^2 p$	$(1-p)^3$

例2.2：若随机变量X的概率分布律为

$$P(X=k)=\frac{c\lambda^{k}}{k!},\ k=0,1,2,\cdots,\ \lambda>0$$

求常数c.

解：

$$1=\sum_{k=0}^{+\infty}P\{X=k\}$$

$$=c\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=ce^{\lambda}$$

$$\Rightarrow\quad c=e^{-\lambda}$$

几个重要的离散型随机变量

一、0－1分布

若X的分布律为：

X	0	1
p	q	p

随机变量只可能取0、1 两个值

$(p+q=1,\ p>0,\ q>0)$

则称X服从参数为p的0-1分布，或两点分布.

记为

$$X \sim 0-1(p) \text{ 或 } B(1,p)$$

它的分布律还可以写为

$$P(X=k)=p^{k}(1-p)^{1-k}, \ k=0,1.$$

对于一个随机试验，如果它的样本空间只包含两个元素，即 $S=\{e_1,e_2\}$，我们总能在S上定义一个服从（0—1）分布的随机变量。

$$X=X(e)=\begin{cases}0, & \text{当e}=e_1,\\ 1, & \text{当e}=e_2.\end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果。

检查产品的质量是否合格，对新生婴儿的性别进行登记，检验种子是否发芽以及前面多次讨论过的“抛硬币”试验都可以用（0—1）分布的随机变量来描述。

一个随机试验,设A是一随机事件,且P(A)=p,(0<p<1).若仅考虑事件A发生与否,定义一个服从参数为p的0-1分布的随机变量:

$$X=\begin{cases}1, & \text{若A发生},\\ 0, & \text{若A不发生(即}\overline{A}\text{发生)}.\end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果。只有两个可能结果的试验，称为Bernoulli试验。

二、二项分布

n重贝努利试验：设试验E只有两个可能的结果：A与$\overline{A}$，$p(A)=p, 0<p<1$，将E独立地重复进行n次，则称这一串重复的独立试验为n重贝努利试验。

在相同条件下重复进行

即每次试验结果互不影响

- 独立重复地抛n次硬币，每次只有两个可能的结果：正面，反面，

$$P(\text{出现正面}) = 1/2$$

- 将一颗骰子抛n次，设**A={得到1点}**，则每次试验只有两个结果：$A, \overline{A}$,

$$P(A) = 1/6$$

从52张牌中<u>有放回</u>地取n次，设A={取到红牌}，则每次只有两个结果：$A, \overline{A},$

$$P(A) = 1/2$$

如果是不放回抽样呢？

设A在n重贝努利试验中发生X次，则

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,\ n$$

并称**X**服从参数为**p**的二项分布，记

$$X \sim B(n,\ p)$$

注：$1=(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$ 其中$q=1-p$

推导：以n=3为例，设A_i={ 第i次A发生 }

$$P(X=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=(1-p)^3$$

$$P(X=1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=C_3^1p^1(1-p)^{3-1}$$

$$P(X=2)=P(A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3)=C_3^2p^2(1-p)^{3-2}$$

$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=p^3$$

一般 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$

例2.3：有一大批产品，其验收方案如下：先作第一次检验，从中任取10件，经检验无次品接受这批产品，次品数大于2拒收；否则作第二次检验，从中任取5件，仅当5件中无次品便接受这批产品，设产品的次品率为p．求这批产品能被接受的概率.

解：设A={接受该批产品}。 设X为第一次抽得的次品数，Y为第2次抽得的次品数.

则X～B(10,p)，Y～B(5,p)，且{X=i}与{Y=j}独立。

$$P(A)=P(X=0)+P(1\le X\le 2\text{且}Y=0)$$

$$=P(X=0)+P(1\le X\le 2)\cdot P(Y=0)$$

$$=P(X=0)+(P(X=1)+P(X=2))\cdot P(Y=0)$$

$$=(1-p)^{10}+[10p(1-p)^9+45p^2(1-p)^8]\cdot(1-p)^5$$

例2.4： 甲和乙比赛，甲的实力更强一点. 每一局甲赢的概率为p，这里$0.5 < p < 1$. 设各局胜负相互独立. 设k是一正整数. 问：对甲而言，$2k-1$局k胜制有利还是$2k+1$局$k+1$胜制有利？

解： 令X_n表示前n局甲赢的局数, 则$X_n \sim B(n,p)$

令w_k表示$2k-1$局k胜制中最终甲赢的概率.

则$w_k = P(X_{2k-1} \ge k)$. 令$q = 1 - p$.

由全概率公式:

$$w_{k+1} = P(X_{2k+1} \ge k+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{2k-1} P(X_{2k-1} = i) P(X_{2k+1} \ge k+1 \mid X_{2k-1} = i)$$

$$P(X_{2k+1}\ge k+1\mid X_{2k-1}=i)=\begin{cases}0; & i\le k-2\\ p^2; & i=k-1\\ 1-q^2; & i=k\\ 1; & i\ge k+1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}w_{k+1}&=p^2P(X_{2k-1}=k-1)+(1-q^2)P(X_{2k-1}=k)\\&\quad+P(X_{2k-1}\ge k+1)\\&=w_k+p^2P(X_{2k-1}=k-1)-q^2P(X_{2k-1}=k)\\&=w_k+p^2C_{2k-1}^{k-1}p^{k-1}q^k-q^2C_{2k-1}^{k}p^kq^{k-1}\\&=w_k+C_{2k-1}^{k-1}p^kq^k(p-q)>w_k\end{aligned}$$

对甲而言,$2k+1$局$k+1$胜制更有利

例2.5：设随机变量 $X \sim B(100, 0.05)$,

求$P(X \leq 10)$和$P(X = 10)$

解：$P(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} P(X = k)$

$$= \sum_{k=0}^{10} C_{100}^{k} 0.05^{k} 0.95^{100-k}$$

使用*Excel*表单：
在任一单元格中输入
“=*BINOM.DIST*(10,100,0.05,*TRUE*)”,
点“确定”后，在单元格中出现“0.988528”.
这里“*TRUE*”可用“1”代替.

计算$P(X=10)$，
在任一单元格中输入
“=*BINOM.DIST*(10,100,0.05, *FALSE*)”,
点“确定”后，在单元格中出现“0.016715884”.
这里“*FALSE*”可用“0”代替.

三. 泊松分布(Poisson分布)

若随机变量**X**的概率分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^{k}e^{-\lambda}}{k!},\ k=0,1,2,\cdots,\ \lambda>0$$

称**X**服从参数为λ的泊松分布，记

$$X\sim P(\lambda)$$

例2.6： 设一个互联网服务器有3个调制解调器. 每个与服务器连接的用户需要一个调制解调器. 设用户个数服从参数为2的泊松分布.

(1)计算调制解调器不够用的概率?

(2)如果要使得调制解调器够用的概率达到0.98以上, 至少需要多少个调制解调器?

解： 用X表示用户个数，则$X \sim P(2)$.

(1)令$p_i = P(X=i), F(i) = P(X \le i)$.

则$F(3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = e^{-2}(1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}) = 0.8571$

所求概率为$P(X>3) = 1 - F(3) = 0.1429$

(2)$F(3) < 0.98$ $\quad p_4 = e^{-2}\frac{2^4}{4!} = 0.0902$

$F(4) = F(3) + p_4 = 0.9473 < 0.98$

$p_5 = e^{-2}\frac{2^5}{5!} = 0.0361$ $\quad F(5) = F(4) + p_5 = 0.9834 > 0.98$

所以至少需5个调制解调器.

例2.7：设某汽车停靠站单位时间内候车人数

$$X \sim P(4.8),$$

求(1)随机观察1个单位时间，至少有3人候车的概率；

(2)随机独立观察5个单位时间，恰有4个单位时间至少有3人候车的概率。

解:(1) $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$

$$= 1 - e^{-4.8}(1 + 4.8 + \frac{4.8^2}{2!}) = 0.8580$$

(2) 设5个单位时间内有Y个单位时间是"至少有3人候车",

则$Y \sim B(5, p)$, 其中$p = P(X \geq 3) = 0.8580$,

于是

$$P(Y = 4) = C_5^4 p^4 (1 - p) = 0.7696.$$

二项分布与泊松分布有以下近似公式：

当$n > 10, p < 0.1$时，

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \text{ 其中 } \lambda = np$$

事实上，$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda} \Bigg/ \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k$$

$$\approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

因为当n充分大和适当的λ时，

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \approx 1, \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k \approx 1, \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda} \approx e^{-\lambda}$$

例2.8：某地区一个月内某种疾病的患病率是1/200，设各人是否患病相互独立。若该地区一社区有1000个成年人，求某月内该社区至少有3人患病的概率。

解：设该社区1000人中有X个人患病，

则 $X \sim B(1000, p)$, 其中$p = 1/200$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 0.8760$$

利用泊松分布进行近似计算，取$\lambda = 5$,

$$P(X \geq 3) \approx 1 - \frac{e^{-5}}{0!} - \frac{5e^{-5}}{1!} - \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = 0.8753$$

泊松分布使用*Excel*表单：
在*Excel*的任一单元格输入“=*POISSON.DIST*(2,5,1)”，回车，就在单元格中出现“0.124652019”.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 0.875347981.$$

超几何分布

若随机变量X的概率分布律为

$$P(X=k)=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n}, k=l_1, l_1+1, \ldots, l_2,$$

其中，$l_1=\max(0, n-b)$, $l_2=\min(a, n)$.

称X服从超几何分布

- 例：一袋中有a个白球，b个红球，a＋b＝N,从中不放回地取n个球，设每次取到各球的概率相等，以X表示取到的白球数，则X服从超几何分布。

几何分布

若随机变量X的概率分布律为

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,3,\ldots,\quad 0<p<1.$$

称X服从参数p的几何分布

- 例：从生产线上随机抽产品进行检测，设产品的次品率为p，0<p<1，若查到一只次品就得停机检修，设停机时已检测到X只产品，则X服从参数p的几何分布。

巴斯卡分布

若随机变量**X**的概率分布律为

$$P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^{r}(1-p)^{k-r},k=r,r+1,r+2,\ldots,$$

$$\text{其中}r\text{为正整数},0<p<1.$$

称X服从参数为(r, p)的巴斯卡分布.

- 例：独立重复地进行试验，每次试验的结果为成功或失败，每次试验中成功的概率均为p，$0<p<1$，试验进行到出现r次成功为止，以X表示试验次数，则X服从参数为(r, p)的巴斯卡分布。

思考题：一盒中有2个红球4个白球，

（1）从中取一球，X表示取到的红球数；

（2）采用不放回抽样取3球，Y表示取到的红球数；

（3）采用放回抽样取3球，Z表示取到的红球数；

（4）采用放回抽样取球，直到取到红球为止，U表示取球次数；

（5）采用放回抽样取球，直到取到3个红球为止，V表示取球次数。

上述随机变量X,Y,Z,U,V的分布律是什么呢？

解答：(1)X服从0－1分布，P(X=1)=1/3，P(X=0)=2/3；

（2）Y服从超几何分布，

$$P(Y=k)=\frac{C_2^k C_4^{3-k}}{C_6^3}, k=0,1,2;$$

（3）Z服从二项分布B(3, 1/3)，

$$P(Z=k)=C_3^k \frac{2^{3-k}}{3^3}, k=0,1,2,3;$$

（4）U服从几何分布，

$$P(U=k)=\frac{2^{k-1}}{3^k}, k=1,2,3,\ldots$$

（5）V服从巴斯卡分布，

$$P(V=k)=C_{k-1}^2 \frac{2^{k-3}}{3^k}, k=3,4,5,\ldots$$

问题：小庞刚租到一所房子，房东给了他5把钥匙，其中只有一把能打开大门。计算在以下三种方式下，他打开大门所需的试钥匙次数的分布律.

(1)每次试开失败后，从5把钥匙中任选一把再试；

(2)每次试开失败后，从其余4把钥匙中任选一把再试；

(3)当他试开失败后，在试开钥匙上做个记号，从不做记号的钥匙中任选一把再试.

§3　随机变量的分布函数

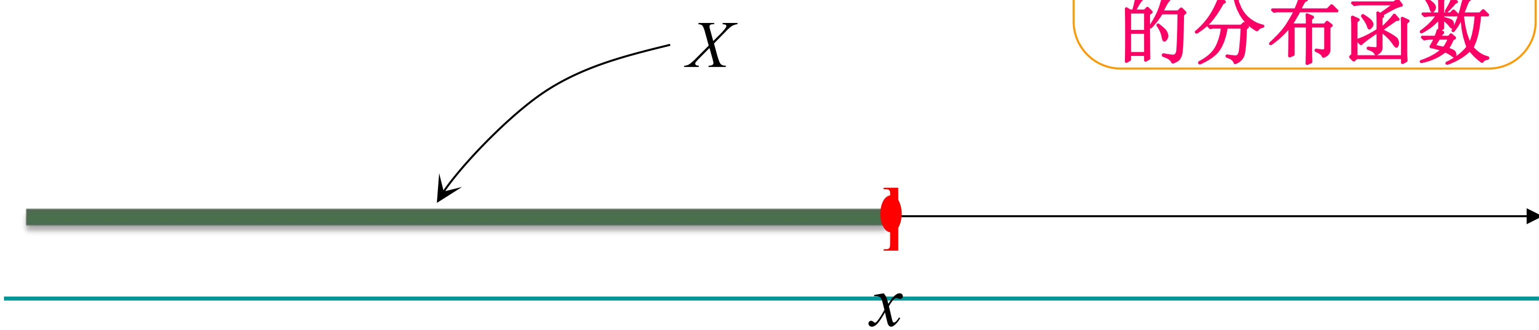
定义：随机变量X，若对任意实数x，函数

$$F(x)=P(X\le x)$$

称为X 的分布函数.

任何随机变量都有相应的分布函数

$F(x)$的几何意义：



$F(x)$的性质：

1) $0 \le F(x) \le 1$

2) $F(x)$单调不减，且$F(-\infty)=0$， $F(+\infty)=1$

$\because \quad 0 \le P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

3) $F(x)$右连续,即$F(x+0)=F(x)$.

4) $F(x)-F(x-0)=P(X=x)$

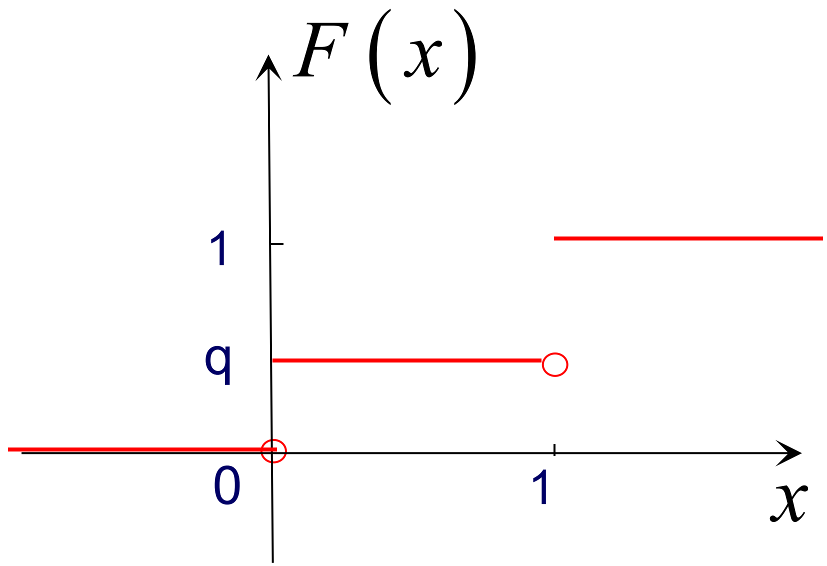
例3.1：设 $X \sim B(1,p), 0<p<1, q=1-p,$

X	0	1
p	q	p

求 X 的分布函数 $F(x)$.

解：

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0 & x<0\\ q & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$



一般地，设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1,2,\cdots$$

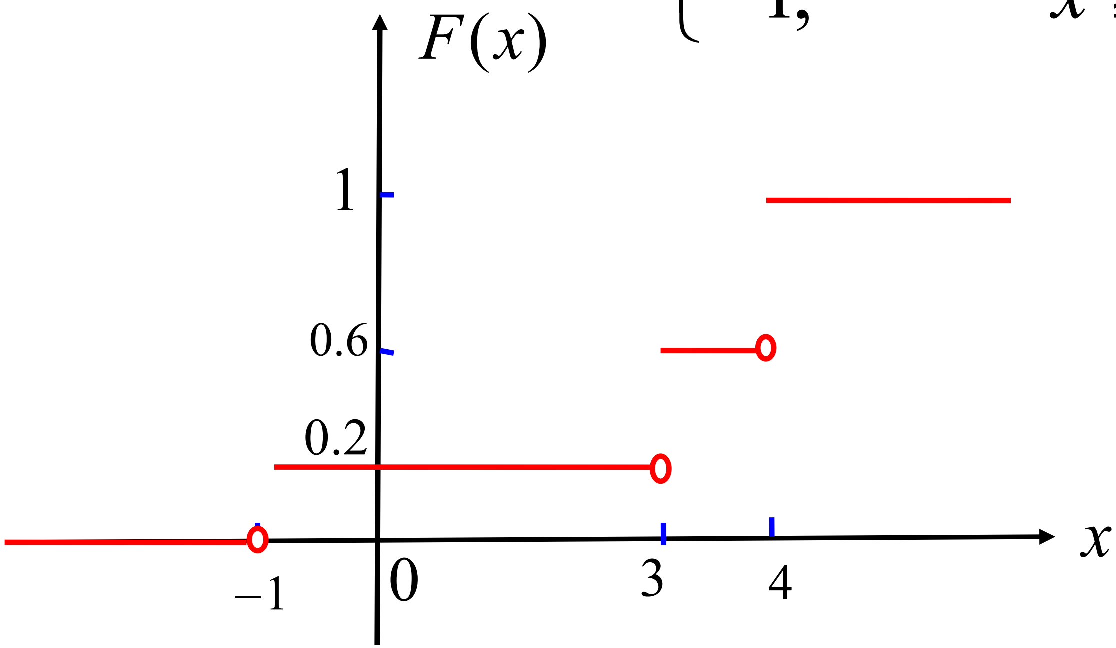
由概率的可列可加性得X的分布函数为

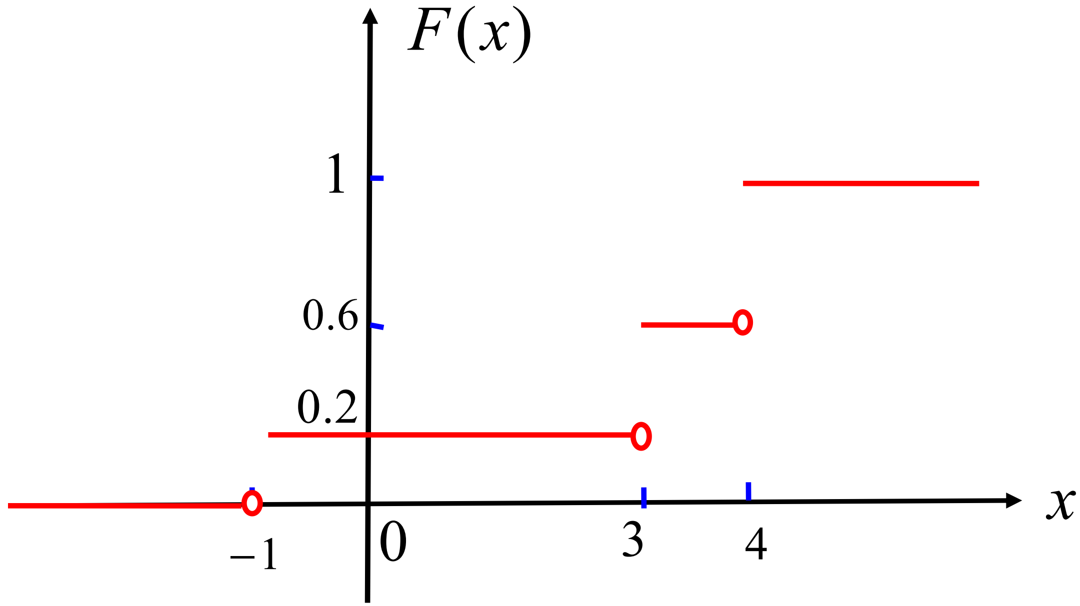
$$F(x) = \sum_{x_k \le x} p_k$$

分布函数$F(x)$在$x = x_k, (k = 1,2,\cdots)$处有跳跃，其跳跃值为$p_k = P\{X = x_k\}$

例3.2：设X 的分布函数如下，求X的分布律。

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.2, & -1\le x<3,\\ 0.6, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$





解：$F(x)$是阶梯函数，只在$-1,3,4$有跳，跳的幅度分别是0.2，0.4，0.4. $\therefore$分布律为

X	-1	3	4
p	0.2	0.4	0.4

例3.3：设一物体在**A,B**两点间移动，**A,B**之间距离**3**个单位。该物体落在**A,B**间任一子区间的概率与区间长度成正比。设它离**A**点的距离为**X**，求**X**的分布函数。

解：根据题意，$P(0 \le X \le 3) = 1,$

$$P(0 \le X \le 3) = 3k = 1, \quad \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

当$x < 0$时，　$F(x) = P(X \le x) = 0,$

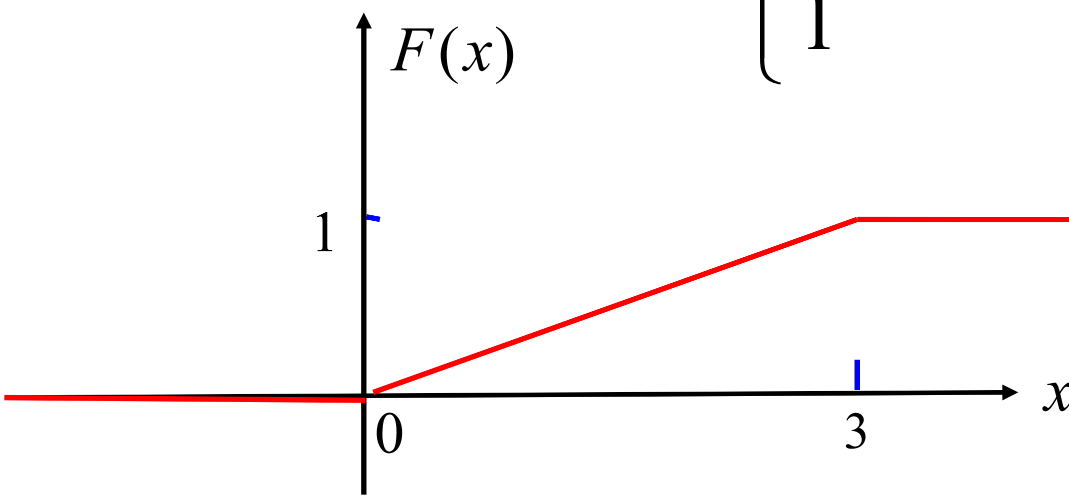
当$x \ge 3$时，　$F(x) = P(X \le x) = 1,$

当$0 \le x < 3$时，　$F(x) = P(X \le x)$

$$= P(X < 0) + P(0 \le X \le x) = \frac{x}{3}.$$

X的分布函数为

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{3} & 0\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$



与离散型随机变量的分布函数不同

§4 连续型随机变量及其密度函数

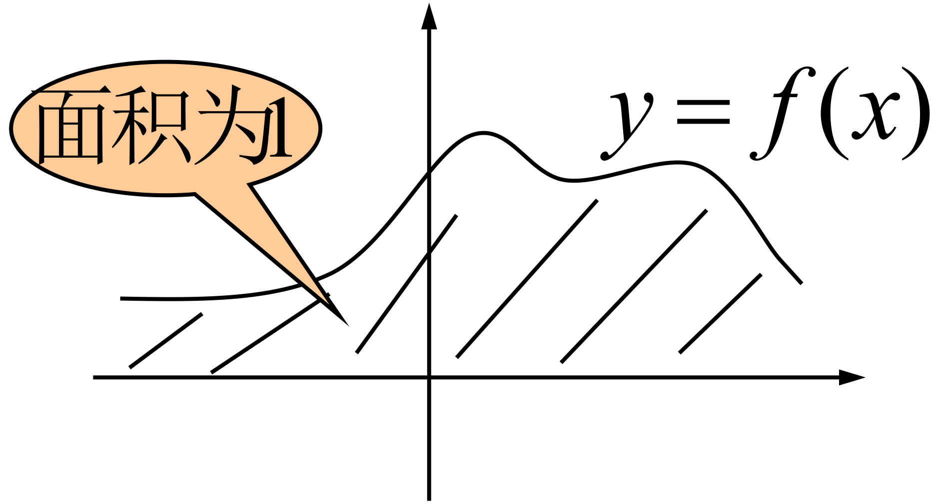
定义:对于随机变量X的分布函数 $F(x)$, 若存在非负的函数 $f(x)$,使对于任意实数 x,有:

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

则称X为连续型随机变量,

其中$f(x)$称为X的概率密度函数，简称密度函数。

$f(x)$的性质：

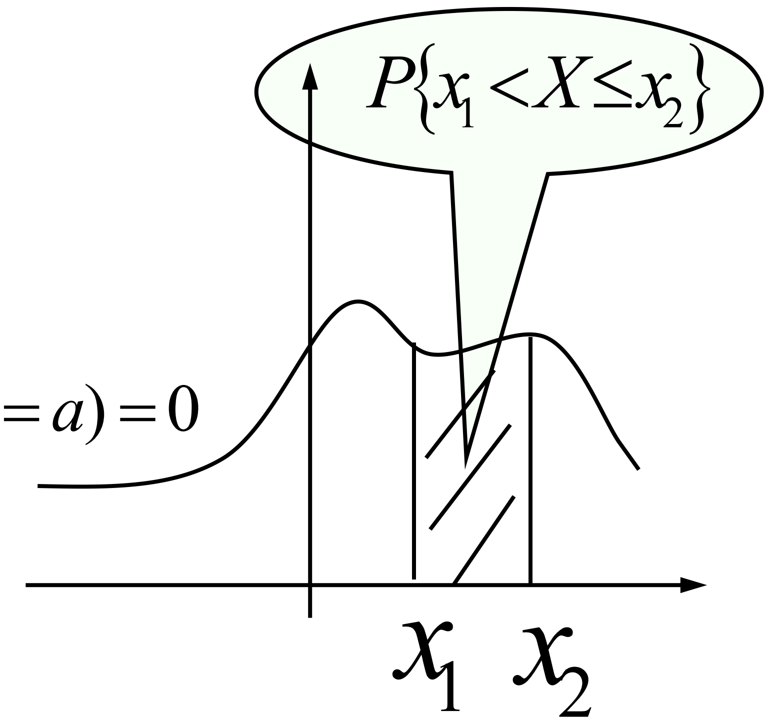


1) $f(x)\geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3） 对于任意的实数x_1，$x_2(x_2 > x_1)$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \Rightarrow P(X=a)=0$$



$f(x)$的性质：

4) 在$f(x)$连续点x, $F'(x)=f(x)$

即在$f(x)$的连续点

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

与物理学中的质量线密度的定义相类似

$$P(x<X\le x+\Delta x)\approx f(x)\cdot\Delta x$$

这表示X落在点x附近（$x, x+\Delta x$]的概率近似等于$f(x)\Delta x$

思考题：

设A，B为随机事件，

若$P(A)=1$，则A为必然事件吗？

若$P(B)=0$，则B为不可能事件吗？

若$P(AB)=0$，则A与B不相容吗？

答：都不一定。例如：

$$X\in[0,1], f(x)=\begin{cases}1, x\in[0,1],\\ 0,\text{其他}.\end{cases} A=\{0<X<1\},$$

$B=\{X=0.5\}$, 则$P(A)=1$，$P(B)=0$，$P(AB)=0$.

- 例**4.1**：设X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} c & 0<x<1 \\ 2/9 & 3<x<6 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(1) 求常数c的值；

(2) 写出X的概率分布函数；

(3) 要使 $P(X<k)=\dfrac{2}{3}$，求k的值。

解： (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

$$=c\int_0^1 dt+\frac{2}{9}\int_3^6 dt =\frac{2}{3}+c \Rightarrow c=\frac{1}{3}$$

(2) $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x \frac{1}{3}dt & 0\le x<1 \\ \int_0^1 \frac{1}{3}dt & 1\le x<3 \\ \int_0^1 \frac{1}{3}dt+\int_3^x \frac{2}{9}dt & 3\le x<6 \\ 1 & x\ge 6 \end{cases} =\begin{cases} 0 & x<0 \\ x/3 & 0\le x<1 \\ 1/3 & 1\le x<3 \\ (2x-3)/9 & 3\le x<6 \\ 1 & x\ge 6 \end{cases}$$

$$(3)\quad 使\ P(X<k)=\frac{2}{3}=F(k)\Rightarrow k=4.5$$

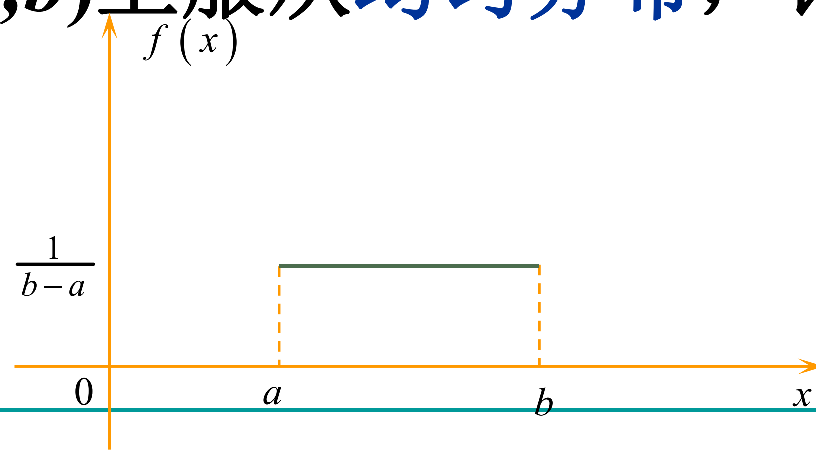
几个重要的连续型随机变量分布

一、均匀分布

定义：设随机变量X具有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b),\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

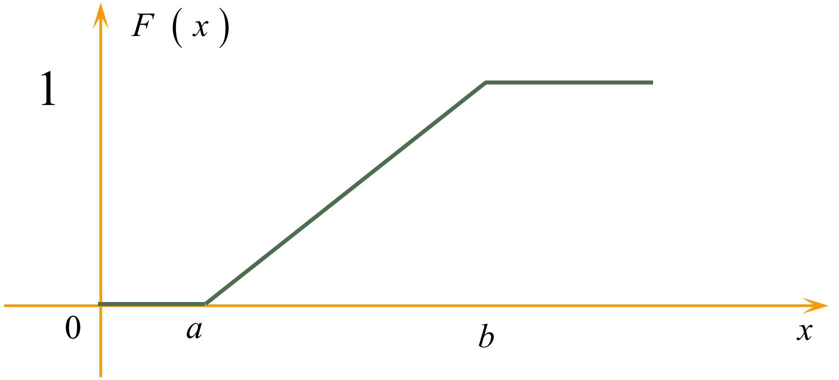
称X在区间(a,b)上服从**均匀分布**，记为$X\sim U(a,b)$.



设 $a \le c < c+l \le b$

$$\Rightarrow P(c < X < c+l) = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dt = \frac{l}{b-a} \quad \text{----与}c\text{无关}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$



例4.2：（1）在区间(-1,2)上随机取一数X，试写出X的概率密度。并求 $P(X>0)$ 的值；

（2）若在该区间上随机取10个数，求10个数中恰有两个数大于0的概率。

解：（1） X为在区间(-1, 2)上均匀分布

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \longrightarrow P(X>0)=\frac{2}{3},$$

（2）设10个数中有Y个数大于0，　　则：

$$Y \sim B(10,\frac{2}{3}) \quad \Rightarrow P(Y=2)=C_{10}^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}$$

例4.3：杭州某长途汽车站每天从早上6点（第一班车）开始，每隔30分钟有一班车开往上海。王先生在早上6:20过X分钟到达车站，设X服从（0，50）上的均匀分布，

（1）求王先生候车时间不超过15分钟的概率；

（2）如果王先生一月中有两次按此方式独立地去候车，求他一次候车不超过15分钟，另一次候车大于10分钟的概率。

解：（1）P(候车时间不超过15钟)=25/50=0.5

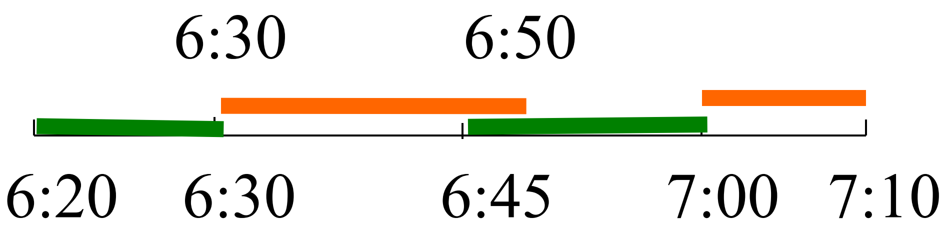
(2) P(候车时间大于10分钟)=30/50=3/5

P(一次候车时间不超过15分钟，另一次大于10分钟)

$$= P((X_1 < 15, X_2 > 10) \cup (X_1 > 10, X_2 < 15))$$

$$= P(X_1 < 15, X_2 > 10) + P(X_1 > 10, X_2 < 15) - P(10 < X_1 < 15, 10 < X_2 < 15)$$

$$= 0.5 \times 3/5 + 3/5 \times 0.5 - 0.1 \times 0.1 = 0.59$$



二.指数分布

定义：设**X**的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

其中 λ **>0**为常数，则称X服从参数为λ的指数分布。记为

$$X \sim Exp(\lambda)\text{或}X \sim E(\lambda)$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

X具有如下的无记忆性：$t_0>0, t>0,$

$$P(X>t_0+t\mid X>t_0)=\frac{P(X>t_0+t)}{P(X>t_0)}$$

$$=\frac{1-F(t_0+t)}{1-F(t_0)}=e^{-\lambda t}=P(X>t)$$

指数分布的无记忆性:

对任何$s>0, P(X-s>t \mid X>s)=P(X>t)$

在$X>s$的条件下，$X-s$仍然服从参数为λ的指数分布

- 如果X表示等待时间, 那么无记忆性说明只要还没等到, 那么剩余等待时间仍然服从参数为λ的指数分布.

- 如果X表示元件寿命, 那么无记忆性说明只要还没坏掉, 那么剩余寿命仍然服从参数为λ的指数分布.

例4.4：某大型设备在任何长度为t的区间内发生故障的次数$N(t)$服从参数为λt的Poisson分布，记设备无故障运行的时间为T.

(1) 求T的概率分布函数；

(2) 已知设备无故障运行10个小时，求再无故障运行8个小时的概率。

解：(1) $P\left\{N\left(t\right)=k\right\}=e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^{k}/k!,\ k=0,1,2,\cdots$

$$F_T\left(t\right)=P\left\{T\le t\right\}$$

当$t<0$时，$F_T\left(t\right)=0$

当$t\ge 0$时，$F_T\left(t\right)=P\{N(t)\ge 1\}$

$$=1-P\left\{N\left(t\right)=0\right\}=1-e^{-\lambda t}$$

(2) $P\{T\ge 18\mid T>10\}=\dfrac{P\{T>18\}}{P\{T>10\}}=e^{-8\lambda}=P\{T>8\}$

三、正态分布

定义：设X的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

其中 $-\infty<\mu<\infty,\sigma>0$ 为常数，称X服从参数为 μ,σ 的正态分布(Gauss分布)，

记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

可以验证：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\because \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{令 t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

记 $I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$$\Rightarrow I^2=\iint e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}dr \quad \Rightarrow I=\sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

$$X \sim N(\mu,\sigma^2):$$

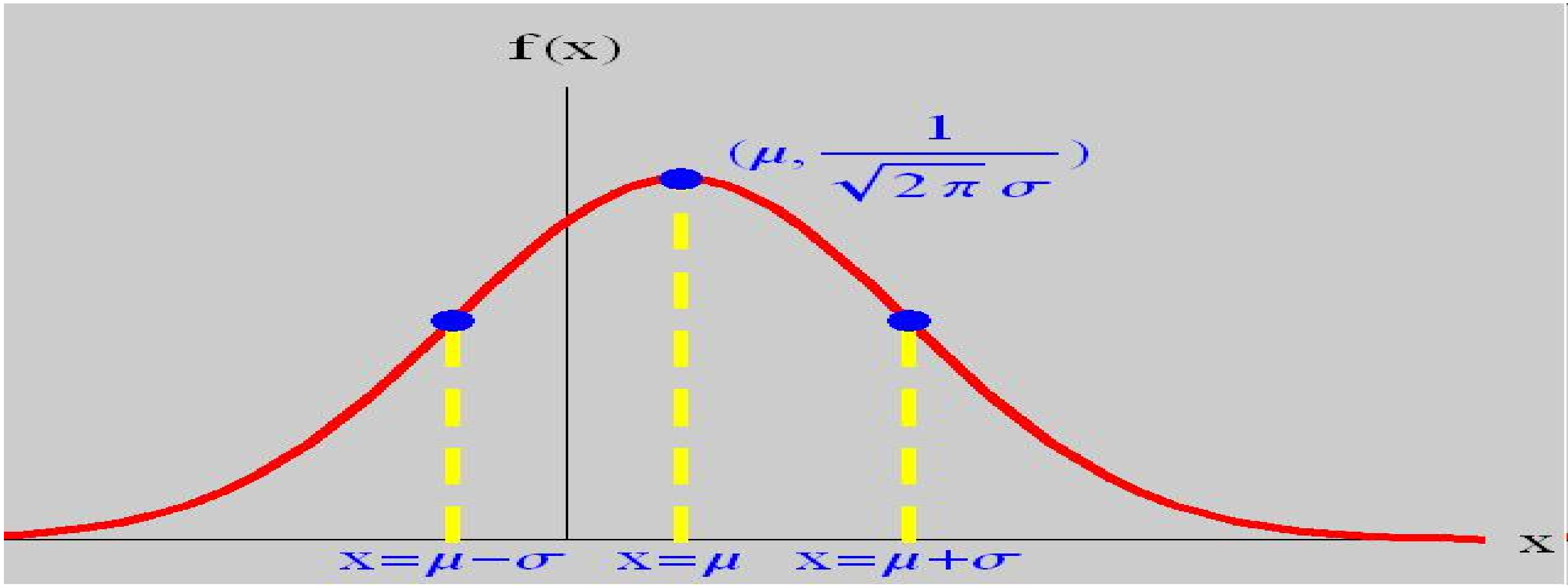
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}，\quad -\infty<x<+\infty$$

1° $f(x)$关于$x=\mu$对称

2° $f_{\max}=f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

3° $\lim\limits_{|x-\mu|\to\infty} f(x)=0$

正态概率密度函数

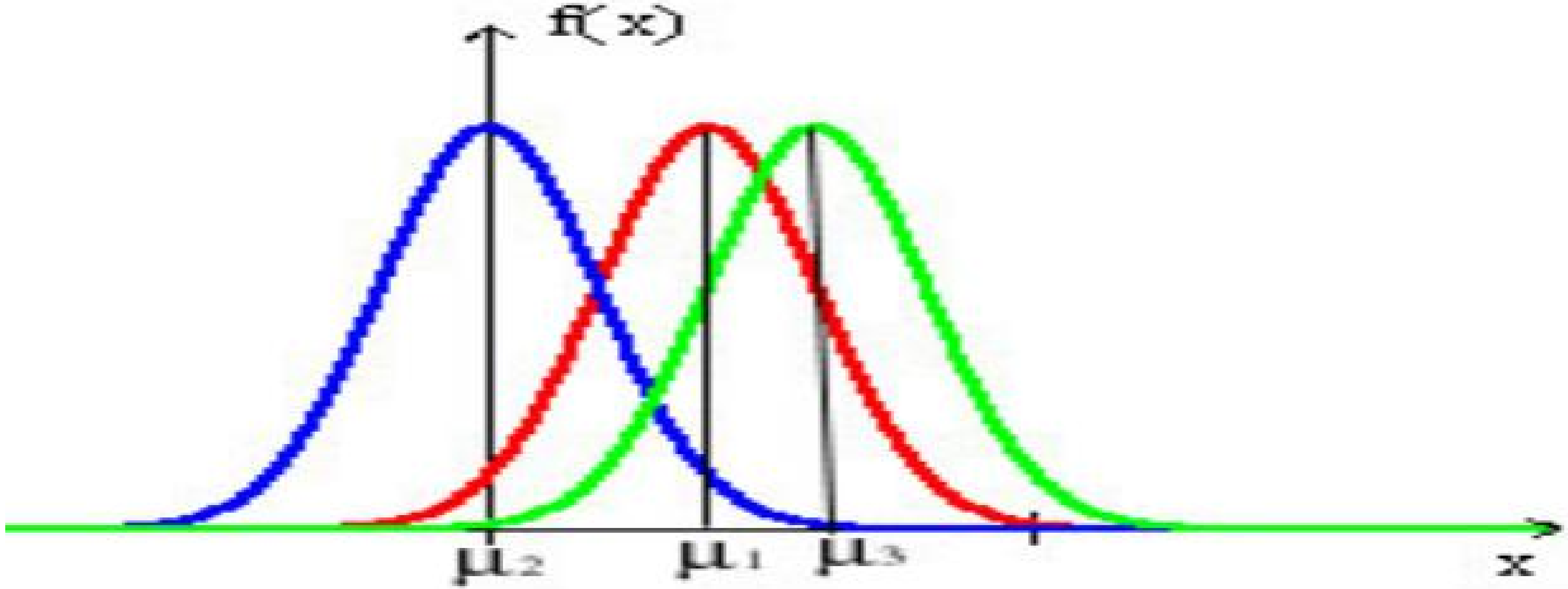


$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<+\infty$$

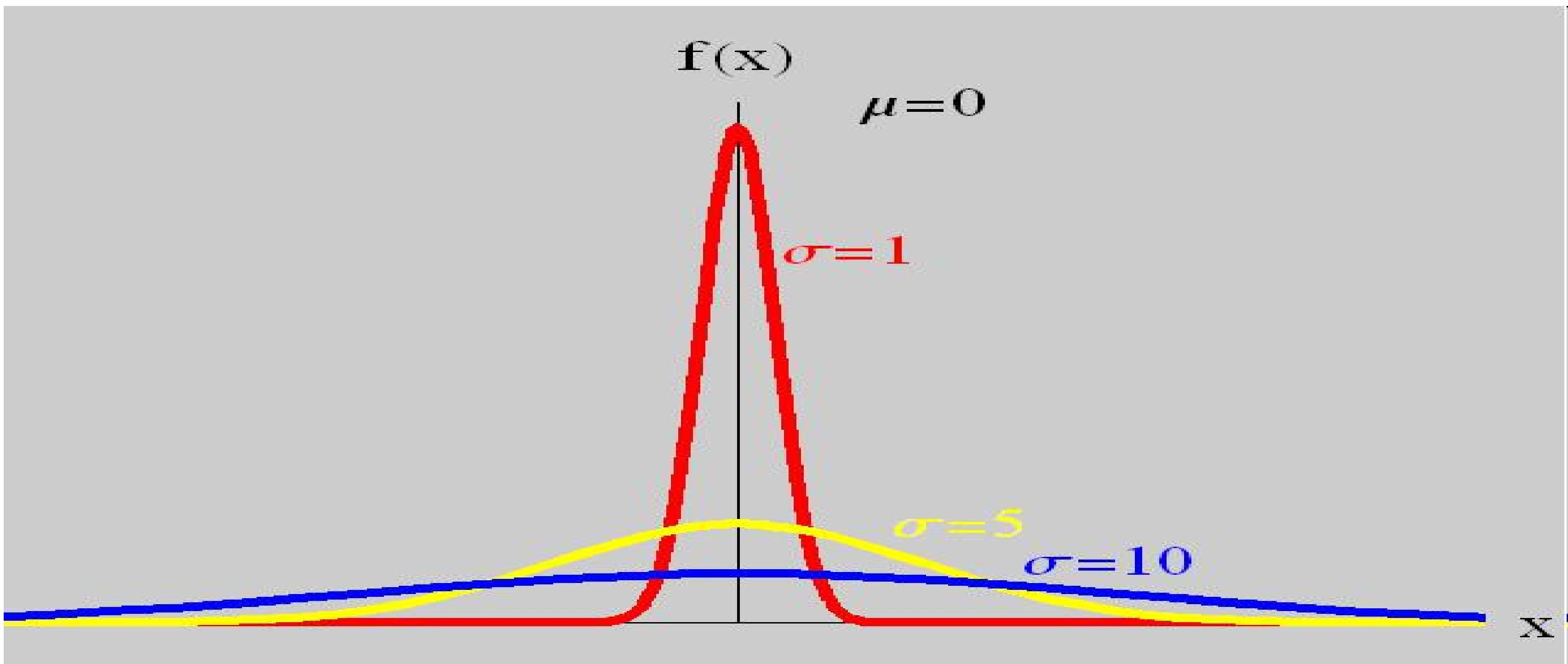
当固定 σ, 改变 μ 的大小时,

$f(x)$ 图形的形状不变,只是沿

着 x 轴作平移变换;



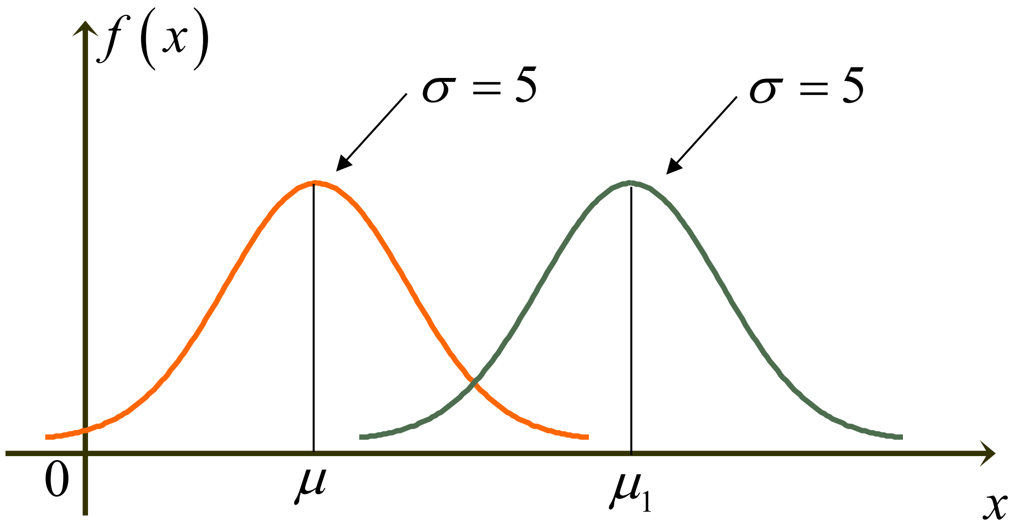
当固定 μ, 改变 σ 的大小时, $f(x)$ 图形的对称轴不变,而形状在改变,σ 越小,图形越高越瘦,σ越大,图形越矮越胖.



$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

称 μ 为位置参数(决定对称轴位置)

σ 为尺度参数(决定曲线分散性)



- X的取值呈中间多，两头少，对称的特性。
- 当固定μ时，σ越大，曲线的峰越低，落在μ附近的概率越小，取值就越分散，即σ是反映X的取值分散性的一个指标。
- 在自然现象和社会现象中，大量随机变量服从或近似服从正态分布。

正态分布下的概率计算

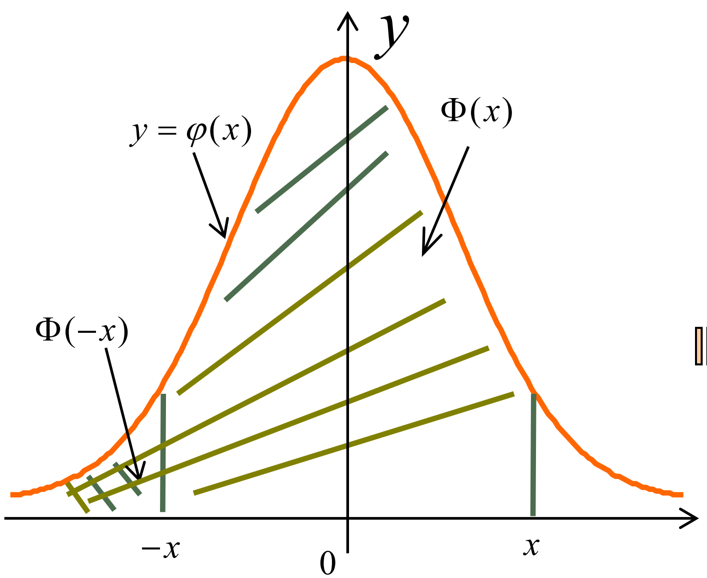
$$P\{X \le x\} = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= ?$$

✦ 若 $Z \sim N(0, 1)$，称Z服从标准正态分布

Z的概率密度：$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

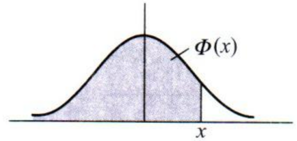
Z的分布函数：$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$



$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$$

附表 2　标准正态分布表

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$$\Phi(0)=0.5$$
$$\Phi(1)=0.8413$$
$$\Phi(2)=0.9772$$
$$\Phi(3)=0.9987$$

$$\Phi(-1)=1-0.8413$$
$$=0.1587$$
$$\Phi(-2)=1-0.9772$$
$$=0.0228$$
$$\Phi(-3)=1-0.9987$$
$$=0.0013$$

当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时

$$\because \quad P(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\boxed{\text{作变换：} \frac{x-\mu}{\sigma} = t)} \quad = \int_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\Rightarrow P(X \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})$$

当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

- 例4.5：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

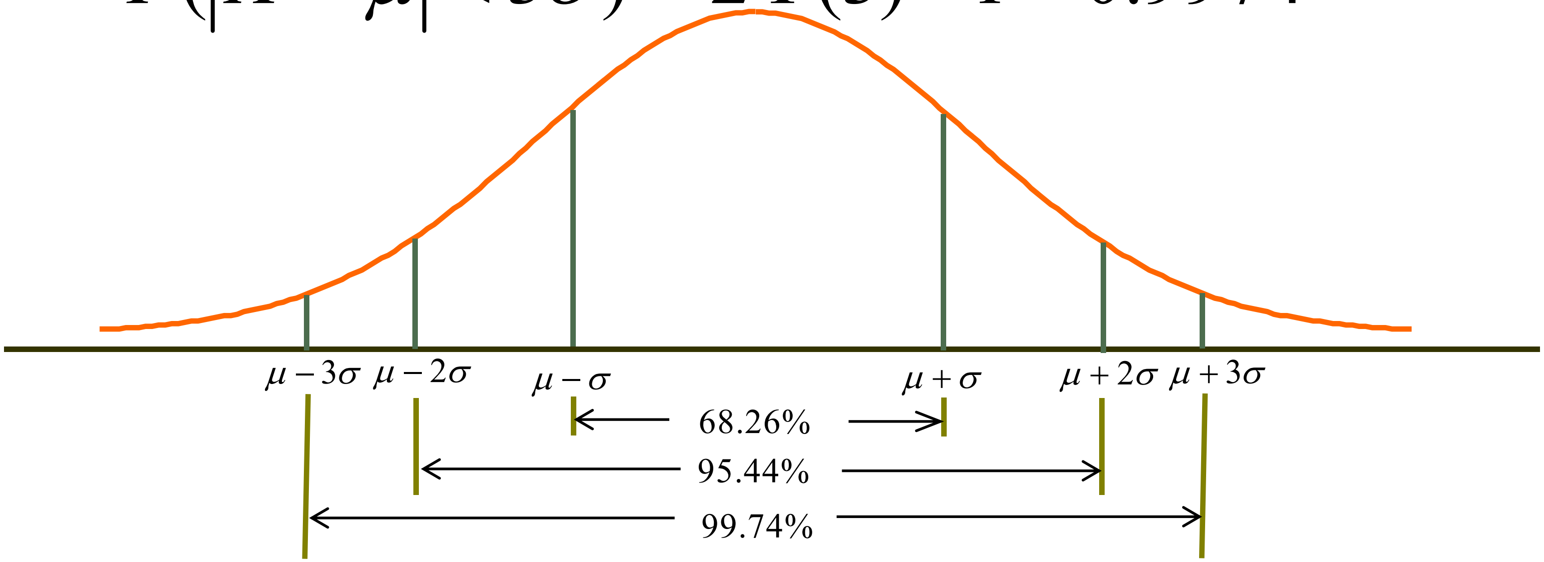
$$P(|X-\mu|<\sigma) = P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma)$$

$$= P\left(\frac{(\mu-\sigma)-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi(1)-\Phi(-1) = 2\Phi(1)-1 = 0.6826$$

$$P(|X-\mu|<2\sigma) = 2\Phi(2)-1 = 0.9544$$

$$P(|X-\mu|<3\sigma) = 2\Phi(3)-1 = 0.9974$$



例4.6 用天平称一实际重量为a的物体，天平的读数为随机变量X，设$X \sim N(a, 0.01^2)$时，

（1）求读数与a的误差小于0.005的概率；

（2）求读数至少比a多0.0085的概率。

解:(1) $P(|X-a|<0.005)$

$$=\Phi(\frac{0.005}{0.01})-\Phi(-\frac{0.005}{0.01})$$

$$=2\Phi(0.5)-1$$

$$\overset{\text{查附表}}{===} 2\times 0.6915-1=0.3830$$

(2) $P(X-a\geq 0.0085)=1-\Phi(0.85)$

$$=1-0.8023=0.1977.$$

注：计算$P(X-a<0.0085)$使用$Excel$表单：

在$Excel$表单的任一单元格输入

$$“=NORM.DIST(0.0085, 0, 0.01, 1)”$$

点击“确定”,即在单元格中出现"0.802337508".

例4.7. 一批钢材(线材)长度$X(cm)\sim N(\mu,\sigma^2)$

(1)若μ=100，σ=2，求这批钢材长度小于97.8cm的概率；

(2)若μ=100，要使这批钢材的长度至少有90%落在区间(97, 103)内，问σ至多取何值?

解：(1) $P(X<97.8)=P(\frac{X-100}{2}<\frac{97.8-100}{2})$

$$=\Phi(\frac{97.8-100}{2})=1-\Phi(1.1)$$

$$\overset{\text{查附表}}{=\!=\!=}1-0.8643=0.1357$$

(2) 需：$P\{97<X<103\}\geq 90\%$

即 $\Phi(\frac{103-100}{\sigma})-\Phi(\frac{97-100}{\sigma})=2\Phi(\frac{3}{\sigma})-1\geq 90\%$

$$\Rightarrow\Phi(\frac{3}{\sigma})\geq 0.95\quad\Rightarrow\frac{3}{\sigma}\geq 1.645\quad\Rightarrow\sigma\leq 1.8237$$

例4.8：设一天中经过一高速公路某一入口的重型车辆数X近似服从 $N(\mu,\sigma^2)$**，已知有25％的天数超过400辆，有33％的天数不到350辆，求** $\mu,\sigma.$

解： 已知 $P(X>400)=0.25, P(X<350)=0.33$

而 $P(X>400)=1-\Phi(\dfrac{400-\mu}{\sigma})=\Phi(\dfrac{\mu-400}{\sigma}), \Phi(-0.675)=0.25,$

$$P(X<350)=\Phi(\frac{350-\mu}{\sigma}), \quad \Phi(-0.440)=0.33,$$

于是 $\begin{cases} \dfrac{\mu-400}{\sigma}=-0.675 \\ \dfrac{350-\mu}{\sigma}=-0.440 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \approx 369.7 \\ \sigma \approx 44.8 \end{cases}$

例4.9：一银行服务需要等待，设等待时间X（分钟）的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{\frac{-x}{10}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

某人进了银行，且打算过会儿去办另一件事，于是先等待，如果超过15分钟还没有等到服务就离开，设他实际的等待时间为Y，(1)求Y的分布函数;(2)问Y是离散型随机变量吗？连续型随机变量吗？

解：（1）$F(y)=P(Y\le y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{\frac{-y}{10}}, & 0\le y<15\\ 1, & y\ge 15\end{cases}$

(2) Y的取值范围为$[0,15]$，故不是离散型随机变量；又$P\{Y=15\}=e^{-1.5}\neq 0$，因此Y也不是连续型随机变量。

§5 随机变量函数的分布

例如，若要测量一个圆的面积，总是测量其半径，半径的测量值可看作随机变量X，若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则Y服从什么分布？

问题：已知随机变量X的概率分布，

且已知Y=g(X)，求Y的概率分布。

例5.1 已知X具有分布律

X	-1	0	1
p	0.2	0.5	0.3

且设$Y=X^2$，求Y的概率分布。

解：Y的所有可能取值为0, 1

$$P(Y=0)=P(X=0)=0.5$$

$$P(Y=1)=P\{(X=1)\cup(X=-1)\}$$

$$=P(X=1)+P(X=-1)=0.5$$

即找出(Y=0)的等价事件(X=0)；

(Y=1)的等价事件(X=1)与(X=-1)的和事件

例5.2：设随机变量X具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $\boldsymbol{Y=X^2}$ 的概率密度函数。

解：分记X，Y的分布函数为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$$

当 $y \le 0$时，$F_Y(y) = 0$;

当 $y \ge 16$时，$F_Y(y) = 1$

当 $0<y<16$ 时,

$$F_Y(y)=P\left\{0<X\le\sqrt{y}\right\}=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{t}{8}dt=\frac{y}{16}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{16}, & 0<y<16\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

Y在区间(0, 16)上均匀分布。

一般，若已知X的概率分布，Y=g(X)，求Y的概率分布的过程为：

1. 若Y为离散量，则先写出Y的可能取值：

$y_1, y_2, \cdots y_j, \cdots$,再找出$\left(Y = y_j\right)$的等价事件$(X \in D)$,得$P(Y = y_i) = P(X \in D)$;

2. 若Y为连续量，则先写出Y的概率分布函数：

$F_Y(y) = P(Y \le y)$，找出$\left(Y \le y\right)$的等价事件$(X \in D)$,得$F_Y(y) = P(X \in D)$；再求出Y的概率密度函数$f_Y(y)$;

关键是找出等价事件。

若Y为连续型随机变量,则

(1) 确定Y的取值范围；

(2) 写出Y的分布函数：$F_Y(y)=P(Y\leq y)$,

找出$\{Y\leq y\}$的等价事件$\{X\in D\}$,得$F_Y(y)=P(X\in D)$;

(3) 对$F_Y(y)$求导得Y的概率密度函数$f_Y(y)$.

注意常用到复合函数求导：

$$\frac{d(F_X(h(y)))}{dy}=f_X(h(y))h'(y)$$

例5.3 设随机变量X的分布律如下表

X	-1	0	1	2
p	$1/3$	$1/6$	$1/6$	$1/3$

$Y=2X+1$, $Z=X^2$, 求Y,Z的概率分布律.

解：Y的可能取值为$-1, 1, 3, 5$,

Z的可能取值为$0, 1, 4$,

$(Y=-1)$的等价事件为$(X=-1)\cdots$

$(Z=1)$的等价事件为$(X=1)\cup(X=-1)$

故得：

Y	-1	1	3	5
p	$1/3$	$1/6$	$1/6$	$1/3$

Z	0	1	4
p	$1/6$	$1/2$	$1/3$

例5. 4. 设随机变量X具有密度函数$f_X(x)$,分别求$Y=|X|$, $Z=X^2$的概率密度函数$f_Y(y)$, $f_Z(z)$.

解：分别记X,Y,Z的分布函数为$F_X(x),F_Y(y),F_Z(z)$.

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=0$. 当$y>0$时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=F_X(y)-F_X(-y).$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(y)+f_X(-y), & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

同理， 当 $z \le 0$ 时, $F_Z(z)=0$. 当 $z>0$ 时,

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2\le z\}$$

$$=P\{-\sqrt{z}\le X\le\sqrt{z}\}=F_X(\sqrt{z})-F_X(-\sqrt{z})$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{z}}[f_X(\sqrt{z})+f_X(-\sqrt{z})], & z>0\\ 0\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, & z\le 0.\end{cases}$$

例5.5 设*X*~*U*(-1, 2)，求

$Y=\left|X\right|$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解：X的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}1/3, & -1<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$

由例5.4得$Y=|X|$的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(y)+f_X(-y), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}, & 0<y<1\\ \frac{1}{3}+0, & 1<y<2\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{3}, & 0<y<1\\ \frac{1}{3}, & 1<y<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

例5.6 设$X\sim N(0, 1)$，求

$Z = X^2$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解：X的密度函数为$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty,$

由例5.4得$Z=X^2$的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{z}}[f_X(\sqrt{z})+f_X(-\sqrt{z})], & z>0\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

此时称Z服从自由度为1的χ^2分布。

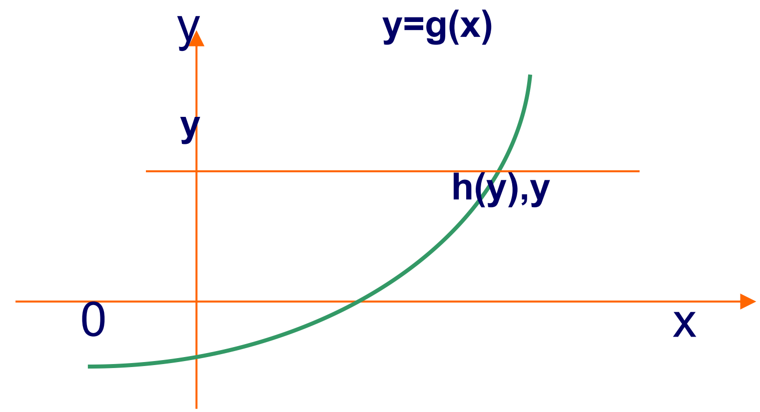
定理2.5.1：设$X \sim f_X(x)$，$g'(x) > 0$ (或$g'(x) < 0$).

$Y = g(X)$, 则Y具有概率密度函数为：

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot \left| h'(y) \right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}}$$

这里(α, β)是Y的取值范围，h是g的反函数

$$h(y) = x \Leftrightarrow y = g(x)$$



证明：不妨设$g'(x)>0$，则$g(x)$为单调增函数，

且：$h'(y)>0$

当 $y\le\alpha$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge\beta$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $\alpha<y<\beta$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$$

$$=P(X\le h(y))=F_X(h(y))$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=f_X(h(y))h'(y)=f_X(h(y))\cdot|h'(y)|$$

同理可证：当$g'(x)<0$ 时，定理为真

例5.7 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b (a \neq 0)$,

求Y的概率密度函数$f_Y(y)$.

解：$y = g(x) = ax + b,\ \ g'(x) = a \neq 0,$

$$x = h(y) = \frac{y-b}{a}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2a^2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$若 X \sim N(\mu, \sigma^2),\ Y = aX + b$$

$$\Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

例5.8 设 $X \sim U(-\pi/2, \pi/2), Y = \sin X$,

求Y的概率密度函数$f_Y(y)$.

解：$Y=\sin X$对应的函数$y=g(x)$在$(-\pi/2,\pi/2)$

上恒有$g'(x)=\cos x>0$，且有反函数

$$x=h(y)=\arcsin y, h'(y)=1/\sqrt{1-y^2}$$

X的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0\ , & 其它\end{cases}$$

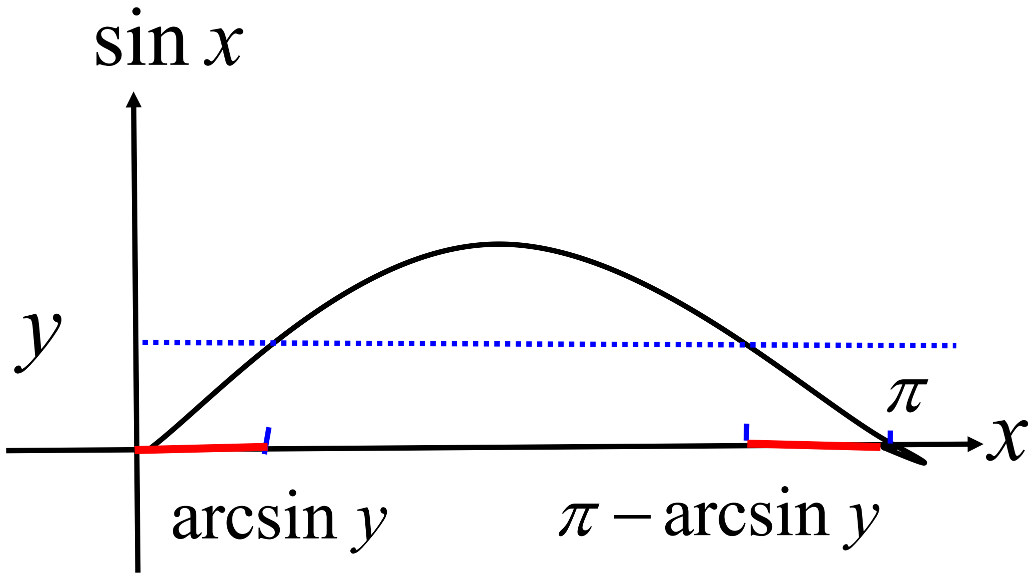
由定理得$Y=\sin X$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1\\ \qquad 0\quad, & 其它\end{cases}$$

例5.9 $Y=\sin X, X\sim U(0,\pi)$， 求$f_Y(y)$.

解：$Y=\sin X$在（0，π）不单调，所以不能应用定理。对$0<y\le 1,$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{\sin X\le y\}=\frac{2\arcsin y}{\pi}$$



所以Y的概率密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\[2ex] 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例5.10　设$X \sim E(\lambda)$，$F(x)$为X的分布函数,

记$Y = F(X)$,试证$Y \sim U(0,1)$(即均匀分布).

解： 由$X \sim E(\lambda)$,$\therefore$分布函数$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x>0, \\ 0, \quad\quad x \leq 0.\end{cases}$

当$x>0$时, $y=F(x)=1-e^{-\lambda x} \in (0,\ 1)$单调增,

反函数$x=F^{-1}(y)=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-y)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{dy}F^{-1}(y)=\frac{1}{\lambda(1-y)},$$

由定理2.5.1， 当$0<y<1$时,

$$f_Y(y)=\lambda\exp\{-\lambda[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)]\}\frac{1}{\lambda(1-y)}=1,$$

$\therefore\ Y \sim U(0,1)$. **更一般的结果见书中例2.5.6.**

课件待续!

THE END