浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

第44讲　　矩估计

参数：反映总体某方面特征的量

比如：合格率，均值，方差，中位数…

参数估计的方法：点估计和区间估计

例如：天气预报

明天的最高温度：12℃. ——点估计

明天的最高温度：12℃ —13℃. ——区间估计

设总体X有未知参数$\theta, X_1,\cdots,X_n$是X的简单随机样本.

点估计问题：构造合适的统计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$

用来估计未知参数θ，称$\hat{\theta}$为参数θ的点估计量.

当给定样本观察值$x_1,\cdots,x_n$时，$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为$\theta$的点估计值。

- 常用的点估计方法：

  矩估计法、极大似然估计法.

例1：某大学新生有4千人参加第一学期末的《微积分》考试. 现随机选出100名学生，计算得他们的平均成绩为72.3分，标准差为15.8分. 试估计全部学生的平均成绩.

记总体的均值为 μ，则 μ 的估计值为72.3.

μ——总体一阶矩，72.3——样本一阶矩

——矩估计

（一）矩估计法

统计思想: 以样本矩估计总体矩, 以样本矩的函数估计总体矩的函数.

理论根据: 辛钦大数定律和依概率收敛的性质.

假设 $\mu_j = E(X^j)$ 存在, $j=1,\ldots,k.$

则

$$\hat{\mu}_j = A_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j, j=1,\ldots,k,$$

$$\hat{h}(\mu_1,\cdots,\mu_k) = h(A_1,\cdots,A_k)$$

设总体有k个未知参数$\theta_1, \ldots, \theta_k$, $X_1, \ldots, X_n$是来自总体的样本，假设总体的前k阶矩存在. 矩估计步骤：

(1) 建立$(\theta_1, \cdots, \theta_k)$与$(\mu_1, \cdots, \mu_k)$的联系：

求总体前k阶矩关于k个参数的函数,

$$\mu_i = E(X^i) = h_i(\theta_1, \cdots, \theta_k), \qquad i = 1, \cdots, k.$$

(2) 求各参数关于k阶矩的反函数

$$\theta_i = g_i(\mu_1, \cdots, \mu_k), \qquad i = 1, \cdots, k$$

(3) 以样本各阶矩$A_1, \cdots, A_k$代替总体各阶矩$\mu_1, \cdots, \mu_k$，得各参数的矩估计

$$\hat{\theta}_i = g_i(A_1, \cdots, A_k), \qquad i = 1, \cdots, k.$$

在实际应用时,也可用样本 i 阶中心矩 B_i

估计总体 i 阶中心矩 v_i

采用的矩不同，得出的参数估计也不同。

例1续，求例1中总体标准差σ的矩估计值.

解：$\mu_1 = E(X) = \mu$

$$\mu_2 = E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \mu_1, \quad \sigma = \sqrt{\mu_2 - \mu_1^2}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} = 72.3, \\ \hat{\sigma} = \sqrt{A_2 - \bar{X}^2} = \sqrt{B_2} = \sqrt{\dfrac{99}{100} \times 15.8^2} = 15.7. \end{cases}$$

例2: 设总体$X \sim B(1,p)$, $X_1,\cdots,X_n$是样本.

求p的矩估计量.

解: $\mu_1 = EX = p$,

$$\therefore p = \mu_1$$

$$\therefore \hat{p} = \bar{X}$$

即用样本比例来估计总体比例.

应用: 一个很大的罐子里装满了糖,如何估计糖的数目n?

解:从罐子里取k颗糖, 做上记号, 再放回罐子中, 然后有放回取m颗. 设取到做记号的糖数为k_1. 则带记号的糖的总体比例为$\frac{k}{n}$, 样本比例为$\frac{k_1}{m}$.

$$\therefore \frac{k}{\hat{n}} = \frac{k_1}{m} \Rightarrow \hat{n} = k\frac{m}{k_1}.$$

类似方法可以估计池塘里鱼的数目, 森林里某动物的数目等.

例3: 设总体X的密度为:$f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0\le x\le 1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

$\theta>0$未知,$X_1,\ldots,X_n$为样本,求θ的矩估计量.

若已获得$n=10$的样本值如下,

0.43	0.01	0.30	0.04	0.54
0.14	0.99	0.18	0.98	0.02

求θ的矩估计值.

解:(1)$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}} dx = \dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$

(2)$\theta = \left(\dfrac{\mu_1}{1-\mu_1} \right)^2$

(3)矩估计量:$\hat{\theta} = \left(\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \right)^2$

(4)$\bar{x} = 0.363$,矩估计值$\hat{\theta} = \left(\dfrac{0.363}{1-0.363} \right)^2 = 0.325.$

例4: 设总体X服从均匀分布$U(a,b)$, a,b未知.

$X_1,\ldots,X_n$为样本, 求a,b的矩估计量.

解:(1)求矩关于参数的函数

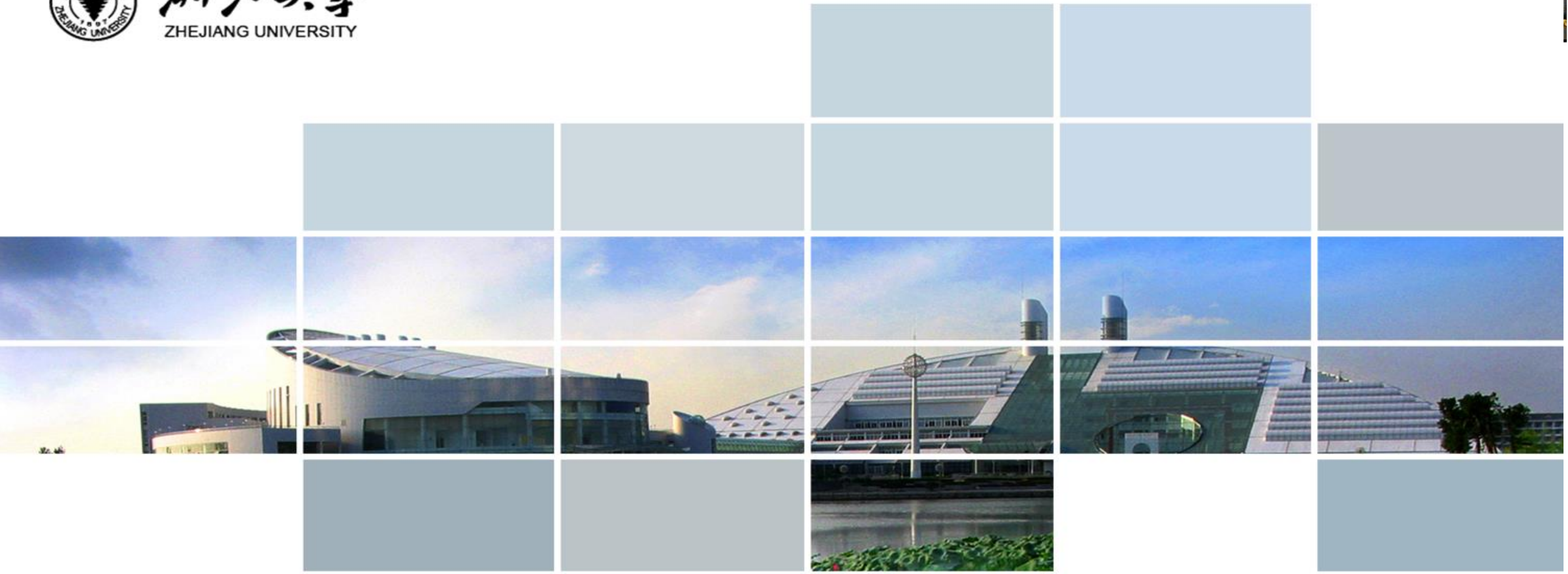
$$\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \nu_2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

(2) 求参数关于矩的反函数$a = \mu_1 - \sqrt{3\nu_2}, b = \mu_1 + \sqrt{3\nu_2}$

(3)以样本矩$A_1 = \bar{X}$代替总体矩μ_1, $B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

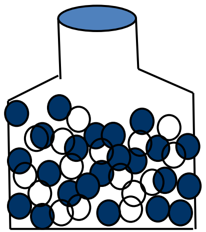
代替ν_2，得参数a和b的矩估计量：

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3B_2}, \qquad \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3B_2}.$$



第45讲　　极大似然估计

极（最）大似然估计的原理介绍



考察以下例子：

假设在一个罐中放着许多白球和黑球，并假定已经知道两种球的数目之比是1:3，但不知道哪种颜色的球多。如果用放回抽样方法从罐中取5个球，观察结果为：黑、白、黑、黑、黑，估计取到黑球的概率p.

解：设取到黑球的概率为p,则$p=\dfrac{1}{4}$或$\dfrac{3}{4}$.

当$p=\dfrac{1}{4}$时，出现本次观察结果的概率为$\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{1024}$.

当$p=\dfrac{3}{4}$时，出现本次观察结果的概率为$\left(\dfrac{3}{4}\right)^4\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{81}{1024}$.

由于 $\dfrac{3}{1024}<\dfrac{81}{1024}$，因此认为$p=\dfrac{3}{4}$比$p=\dfrac{1}{4}$更有可能，

于是$\hat{p}$取为$\dfrac{3}{4}$更合理.

设离散型总体$X \sim p(x;\theta), \theta \in \Theta, \theta$未知. $X_1, \ldots, X_n$为样本,

其观察值为$x_1, \ldots, x_n$, 则事件$\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}$发生的

概率为 **似然函数:** $$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

极大似然原理: $L(\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta).$

称$\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$为$\theta$的**极大似然估计值,** 相应统计量

$\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$为$\theta$的**极大似然估计量(MLE).**

连续型总体X概率密度为$f(x;\theta),\theta\in\Theta,\theta$未知. $X_1,\ldots,X_n$为样本,则样本在观察值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$邻域发生的概率

$$\prod_{i=1}^{n}P(x_i<X_i<x_i+\Delta x_i)\approx\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\Delta x_i,\ \Delta x_i\text{与参数}\theta\text{无关}.$$

因此,似然函数取为$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$

极大似然原理:$L(\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n))=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta).$

例： 设总体X的概率分布律为：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta & \theta/2 & 1-3\theta/2 \end{pmatrix}$，

其中$0<\theta<\frac{2}{3}$，未知.

现得到样本观测值2,3,2,1,3,

求θ的矩估计值与极大似然估计值.

解：(1) 矩估计

$$\mu_1 = E(X) = \theta + 2\times\theta/2 + 3\times(1-3\theta/2)$$

$$= 3 - 5\theta/2$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2}{5}(3-\mu_1)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{5}(3-\bar{X})$$

$$\bar{X} = 2.2 \Rightarrow \hat{\theta} = 0.32$$

(2) 极大似然估计

$$L(\theta)=(\theta/2)(1-3\theta/2)(\theta/2)\theta(1-3\theta/2)$$

$$=\tfrac{1}{16}\theta^3(2-3\theta)^2$$

$$\ln L(\theta)=-\ln 16+3\ln\theta+2\ln(2-3\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{6}{2-3\theta}=0$$

$$\Rightarrow\hat{\theta}=0.4$$

说明：1.未知参数可能不是一个，设为$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$；

2.求$L(\theta)$的最大值时，可转换为求$\ln L(\theta)$的最大值，$\ln L(\theta)$称为对数似然函数.

通常利用$\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}=0, i=1,2,\ldots,k,$

解得$\hat{\theta}_i, i=1,2,\ldots,k.$

3. 若$L(\theta)$关于某个θ_i 是单调增(减)函数，则θ_i的极大似然估计在其边界取得；

4. 若$\hat{\theta}$是θ的极大似然估计，则$g(\theta)$的极大似然估计为$g(\hat{\theta})$.

例1： 设X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$X_1,\ldots,X_n$是样本，求θ的极大似然估计量.

若已获得$n=10$的样本值如下，

0.43	0.01	0.30	0.04	0.54
0.14	0.99	0.18	0.98	0.02

求θ的极大似然估计值.

解：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}$

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+\left(\sqrt{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

$$\Rightarrow\frac{n}{\sqrt{\theta}}=-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

θ的极大似然估计量为：$\hat{\theta} = \dfrac{n^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i\right)^2}.$

θ的极大似然估计值为：$\hat{\theta} = \dfrac{n^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^2} = 0.305.$

例2: 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,\ldots,X_n$是样本，

μ,σ^2均未知. 求μ,σ^2的极大似然估计.

解: $L(\mu,\sigma^2)=\left(1/\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\Rightarrow \begin{array}{l}\hat{\mu}=\bar{X}\\ \hat{\sigma}^2=B_2\end{array}$$

例：设总体X服从均匀分布$U(0,\theta)$，θ是未知参数，样本$X_1,\cdots,X_n$.

(1)求θ的矩估计；

(2)求θ的极大似然估计.

(1) 矩估计：

$$\text{由}\,\mu_1 = E(X) = \int_0^{\theta} \frac{1}{\theta} x dx = \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 2\mu_1 \Rightarrow \hat{\theta} = 2\bar{X}$$

(2) 极大似然估计：

$$f_X(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\Rightarrow L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\le x_1,\cdots,x_n\le\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

关于$\theta>\mathbf{0}$递减，

而θ的范围为：$\theta\ge x_{(n)}=\max\{x_1,\ldots,x_n\}$，

所以$\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$.

例3：设X服从均匀分布$U(a,b)$，a和b未知，样本$X_1,\cdots,X_n$.

(1) 求a和b的极大似然估计.

(2) 求$E(X)$的极大似然估计.

(3) 若已获得$n=5$的样本值如下，

$$0.34 \quad 0.59 \quad 0.16 \quad 0.96 \quad 0.84$$

求$a,b,E(X)$的极大似然估计值.

解：(1) 似然函数

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\le x_i\le b, i=1,\dots,n.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

关于a单调增,关于b单调减.

另一方面，在得到样本值$x_1,\dots,x_n$后,

a的取值$\le \min\{x_1,\dots,x_n\}$,

b的取值$\ge \max\{x_1,\dots,x_n\}$.

只要使得a达到最大值$\min\{x_1,\ldots,x_n\}$,b达到最小值$\max\{x_1,\ldots,x_n\}$,就能使$L(a,b)$达到最大. 所以

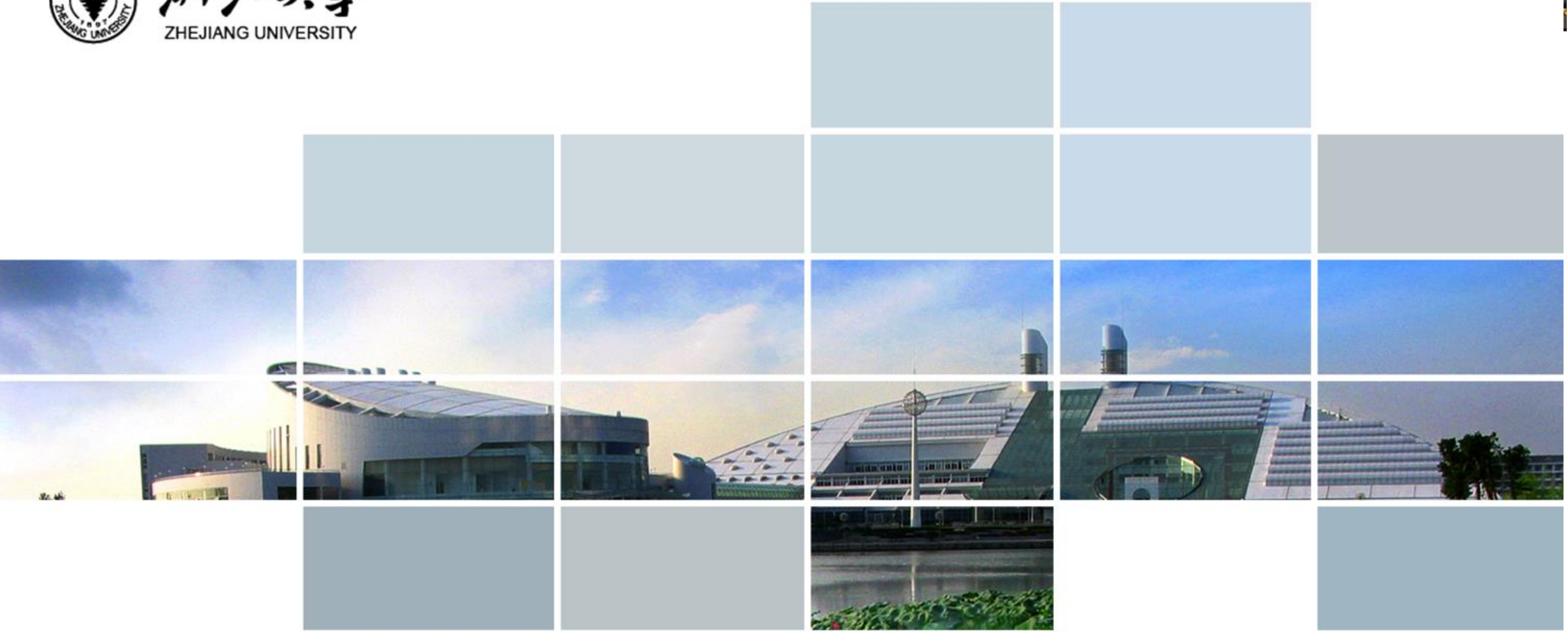
$$\hat{a}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}=X_{(1)},\hat{b}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}=X_{(n)}.$$

(2)$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$的极大似然估计量为$\dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\dfrac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$.

(3)$a,b,E(X)$极大似然估计值分别为:

$$\hat{a}=0.16,\ \hat{b}=0.96,\ \widehat{E(X)}=0.56.$$

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第46讲　估计量的评价准则，无偏性

从前两讲看到，对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价好坏？

四条评价准则：

(1) 无偏性准则

(2) 有效性准则

(3) 均方误差准则

(4) 相合性准则

定义： 若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,满足

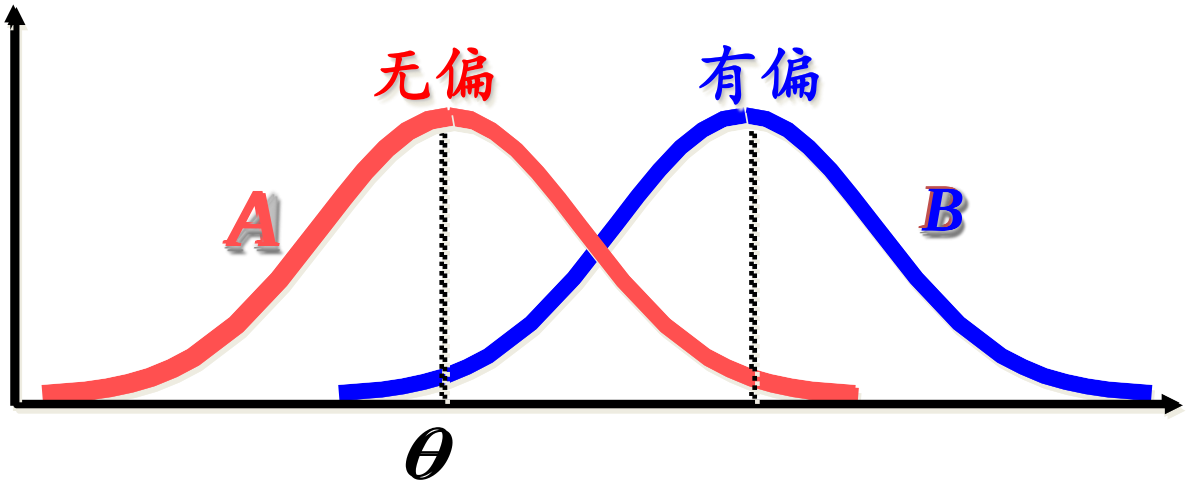
$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,$$

则称$\hat{\theta}$是θ的一个无偏估计量.

若$E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta$,那么$E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$称为估计量$\hat{\theta}$的偏差,

若$\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$,则称$\hat{\theta}$是$\theta$的渐近无偏估计量.

- 无偏性：$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$



无偏性的统计意义是指在大量重复试验下，

由$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$所作的估计值的平均恰是$\theta$，

从而无偏性保证了$\hat{\theta}$没有系统误差.

例1： 设总体X的一阶和二阶矩存在，

$$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2.$$

(1)证明：样本均值$\overline{X}$和样本方差S^2分别是

μ和σ^2的无偏估计；

(2)判断：B_2是否为σ^2的无偏估计？

是否为σ^2的渐近无偏估计？

(1)证：因$X_1, X_2, \cdots, X_n$与X同分布，故有：

$$E\left(\bar{X}\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)$$

$$=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

故$\bar{X}$是μ的无偏估计.

$$E\left(S^2\right)=\sigma^2$$

——见第42讲例2

故S^2是σ^2的无偏估计.

$$(2) B_2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

$$E(B_2) = \frac{n-1}{n} E\left(S^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

故B_2不是σ^2的无偏估计.

$$\lim_{n\to\infty} E(B_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

故B_2是σ^2的渐近无偏估计.

例2：设总体X服从均匀分布$U(0,\theta)$，θ是未知参数，样本$X_1,\cdots,X_n$.

(1)求θ的矩估计，判断是否无偏；

(2)求θ的极大似然估计，判断是否无偏.

(1) 矩估计:

由$\mu_1 = E(X) = \int_0^{\theta} \frac{1}{\theta} x dx = \frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \theta = 2\mu_1 \Rightarrow \hat{\theta} = 2\overline{X}$

因为$E(\hat{\theta}) = E\left(2\overline{X}\right) = 2E(\overline{X}) = 2E(X) = \theta,$

所以$\hat{\theta} = 2\overline{X}$是$\theta$的无偏估计.

(2) 极大似然估计:

$$f_X(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\Rightarrow L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\le x_1,\cdots,x_n\le\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

关于θ>**0**递减,

而θ的范围为: $\theta\ge x_{(n)}=\max\{x_1,\ldots,x_n\}$,

所以$\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

$$F_{X_{(n)}}(x)=\left[F(x)\right]^n=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^n}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta,\\ 1, & x>\theta.\end{cases}$$

于是 $f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

因此有: $E\left(\hat{\theta}_L\right)=E\left(X_{(n)}\right)=\int_0^\theta \dfrac{x\cdot nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\dfrac{n}{n+1}\theta\neq\theta$

所以$\hat{\theta}_L=X_{(n)}$是有偏的.

纠偏方法

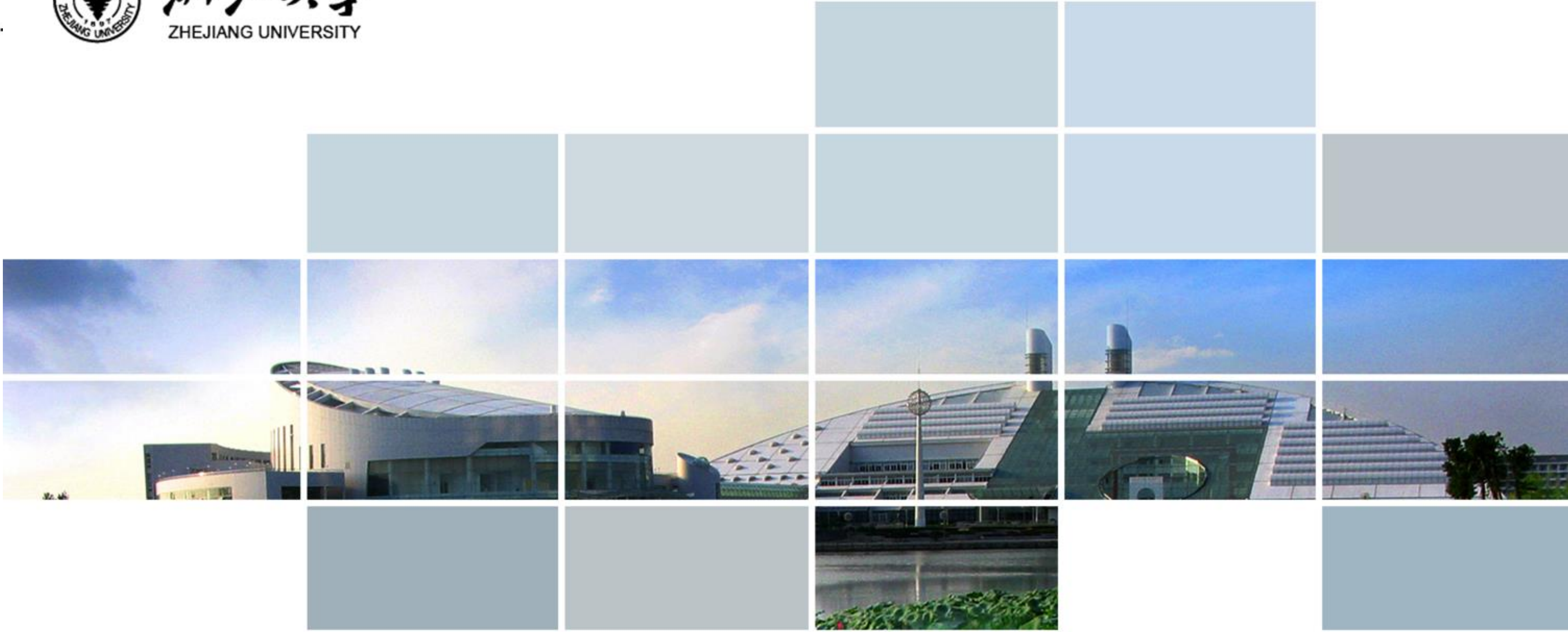
如果$E\left(\hat{\theta}\right)=a\theta+b,\theta\in\Theta$,其中$a,b$是常数，且$a\neq 0$,

则$\frac{1}{a}\left(\hat{\theta}-b\right)$是$\theta$的无偏估计.

在上例中，$E(X_{(n)})=\frac{n}{n+1}\theta$,

取$X_{(n)}^{*}=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$,则$X_{(n)}^{*}$是$\theta$的无偏估计.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY



第47讲　　有效性，均方误差

2. 有效性准则

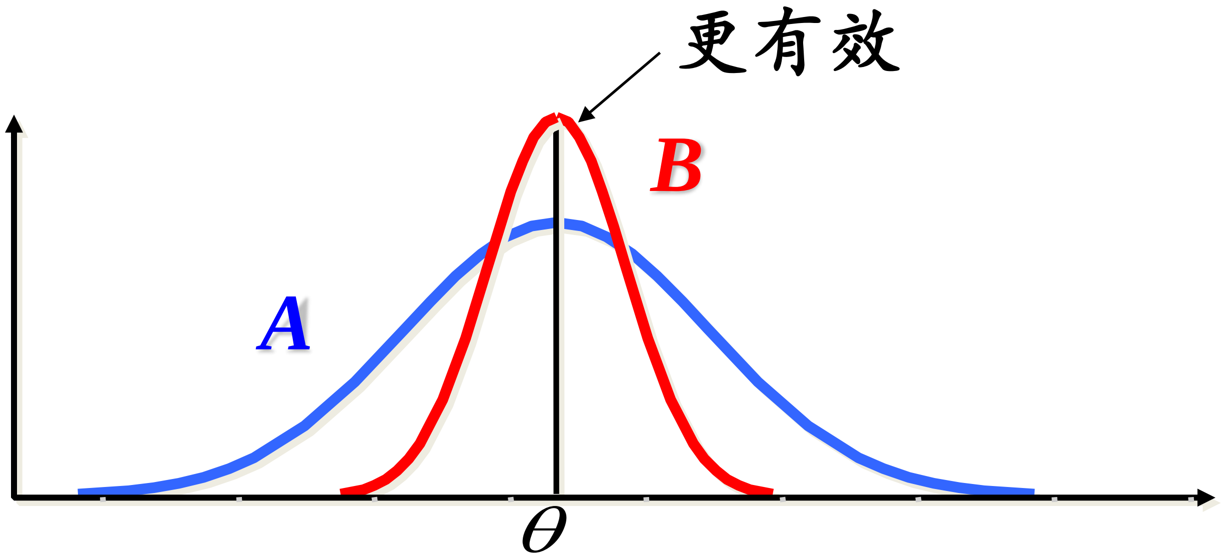
定义：设$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$是$\theta$的两个无偏估计，

如果$D\left(\hat{\theta}_1\right)\le D\left(\hat{\theta}_2\right)$，对一切$\theta\in\Theta$成立，

且不等号至少对某一$\theta\in\Theta$成立，则称

$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

方差较小的无偏估计量是一个更有效的估计量。



例1： 设总体为X, $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2>0$,

$X_1,\cdots,X_n$是样本. 对$1\le k\le n$,令

$\hat{\theta}_k=\frac{1}{k}(X_1+\ldots+X_k)$,为前$k$个样本的样本均值.

则$\hat{\theta}_k$是μ的无偏估计.

判断$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_n(n\ge 2)$中哪个最有效?

解: $D(\hat{\theta}_k) = \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{k}$,

随着k的增加而减少,

$\therefore \hat{\theta}_n$ 最有效.

例2： 设总体$X\sim U[0,\theta]$, $X_1,\cdots,X_n$样本. 已知θ的两个无偏估计为$\hat{\theta}_1=2\bar{X},\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$.

判别$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$哪个更有效($n\geq 2$时)?

解：$D\left(\hat{\theta}_1\right)=D\left(2\bar{X}\right)=\frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$

$$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}\Rightarrow E\left(X_{(n)}^2\right)=\int_0^\theta\frac{nx^{n+1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

于是$D\left(\hat{\theta}_2\right)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\left\{E\left(X_{(n)}^2\right)-\left[E\left(X_{(n)}\right)\right]^2\right\}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$

$\therefore D\left(\hat{\theta}_1\right)=\frac{\theta^2}{3n}>\frac{\theta^2}{n(n+2)}=D\left(\hat{\theta}_2\right)\Rightarrow$ $\hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$更有效

3. 均方误差准则

定义： 设$\hat{\theta}$是参数θ的点估计，方差存在，则称

$E(\hat{\theta}-\theta)^2$是估计量$\hat{\theta}$的均方误差，记为$Mse(\hat{\theta})$.

若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，则有$Mse(\hat{\theta})=D(\hat{\theta})$.

在实际应用中，均方误差准则比无偏性准则更重要.

例3: 利用均方误差准则, 对用样本方差S^2和样本二阶中心矩B_2分别估计正态总体方差σ^2时进行评价.

解：在正态总体下，

$$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1).$$

又因S^2是σ^2的无偏估计，因此

$$Mse(S^2) = D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$ ——第42讲例2

而 $Mse(B_2)=E[(B_2-\sigma^2)^2]=D(B_2)+[E(B_2)-\sigma^2]^2$

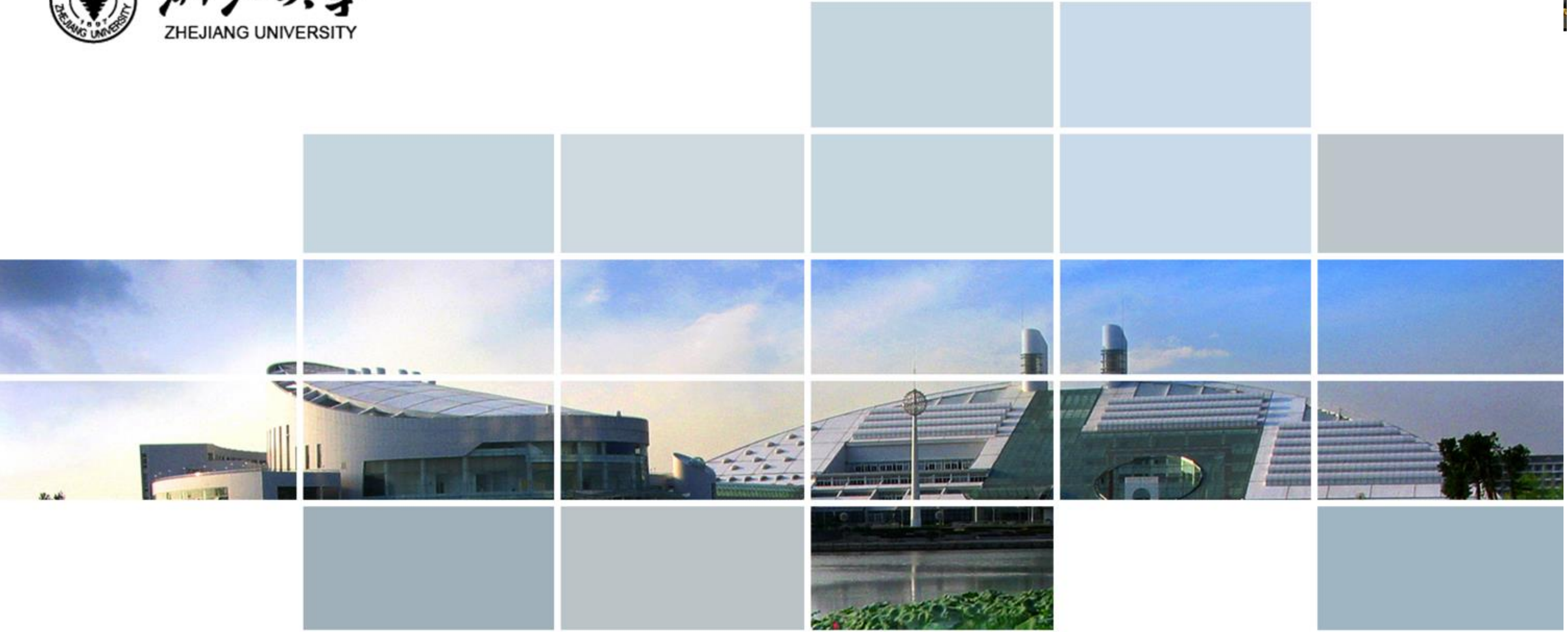
$$=D\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)+\left[E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)-\sigma^2\right]^2$$

$$=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$$

当 $n>1$ 时，有 $\dfrac{2n-1}{n^2}<\dfrac{2}{n-1}$，

因此在均方误差准则下，B_2 优于 S^2.

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第48讲　相合性

4. 相合性准则

定义： 设$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，

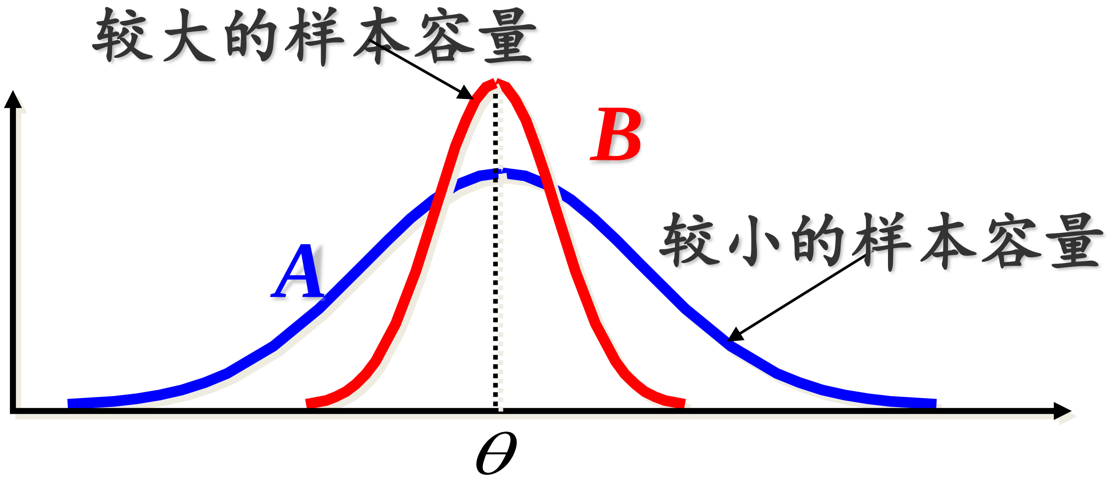
若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to+\infty$时，

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

即$\forall\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\right\}=0$ 成立.

则称$\hat{\theta}_n$为θ的相合估计量或一致估计量.

- 一致性：随着样本容量的增大，估计量越来越接近被估计的总体参数



浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

$A_1,\ldots,A_k$是$\mu_1,\ldots,\mu_k$的相合估计，

即$A_i \xrightarrow{P} \mu_i$

且$g(\mu_1,\ldots,\mu_k)$是连续函数，则

$$g(A_1,\ldots,A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1,\ldots,\mu_k)$$

即$g(A_1,\ldots,A_k)$也是$g(\mu_1,\ldots,\mu_k)$的相合估计.

例1：设总体X的k阶矩$E(X^k)=\mu_k(k\ge 2)$存在,

$X_1,\cdots,X_n$是样本, 证明：

(1) $A_l=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$是$\mu_l$的相合估计,$l=1,\ldots,k$;

(2)B_2,S^2是$D(X)=\sigma^2$的相合估计；

(3) S是σ的相合估计.

证明:(1)由辛钦大数定律知, 对$l=1,\dots,k$,

$$A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l \xrightarrow{P} \mu_l=E(X^l),$$

因此(1)成立.

特别地, $\overline{X}$是$\mu_1=E(X)$的相合估计,

A_2是$\mu_2=E(X^2)$相合估计.

(2)因为$D(X)=\sigma^2=\mu_2-\mu_1^2$，

$$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=A_2-\bar{X}^2,$$

$\therefore B_2=A_2-\bar{X}^2, S^2=\dfrac{n}{n-1}B_2$都是$\sigma^2$的相合估计.

(3) $S=\sqrt{S^2}$是σ的相合估计.

例2：设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是样本，

证明：$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$和$\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$

都是θ的相合估计.

证明：$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} \xrightarrow{P} 2E(X) = \theta \Rightarrow \hat{\theta}_1$是$\theta$的相合估计

$$E\left(\hat{\theta}_2\right) = \theta,\ D\left(\hat{\theta}_2\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

由切比雪夫不等式，$\forall \varepsilon > 0$，当$n \to \infty$时，

$$P\left\{\left|\hat{\theta}_2 - \theta\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{D\left(\hat{\theta}_2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \to 0$$

所以$\hat{\theta}_2$也是θ的相合估计.

浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY

第49讲 置信区间，置信限

根据具体样本观察值,点估计提供一个明确的数值.

但这种判断的把握有多大,点估计本身并没有告诉人们. 为弥补这种不足,提出区间估计的概念.

设X是总体，$X_1,\ldots,X_n$是样本. 区间估计的目的是找到两个统计量：

$$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\ldots,X_n),\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\ldots,X_n),$$

使**随机区间**$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$以一定可靠程度盖住$\theta$.

定义1：设总体X的分布函数$F(x;\theta)$，θ未知. 对给定值$\alpha(0<\alpha<1)$，有两个统计量

$$\theta_L=\theta_L(X_1,\cdots,X_n),\ \theta_U=\theta_U(X_1,\cdots,X_n)，使得：$$

$$P\left\{\theta_L(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\theta_U(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$$

称(θ_L,θ_U)是θ的置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间；

θ_L和θ_U分别为双侧置信下限和双侧置信上限.

θ是确定的值，未知.

θ_L, θ_U是统计量,随机的,依赖于样本.

置信区间$\left(\theta_L, \theta_U\right)$是随机的，依赖于样本.样本不同，

算出的区间也可能不同.

对于有些样本观察值,区间覆盖θ,但对于另一些样本

观察值,区间则不能覆盖θ.

例1：设总体$X \sim N(\mu,4)$, μ未知, $X_1,\ldots,X_4$是样本.

则$\bar{X} \sim N(\mu,1)$.

$$P(\bar{X}-2<\mu<\bar{X}+2)=P(|\bar{X}-\mu|<2)$$

$$=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$\Rightarrow (\bar{X}-2,\bar{X}+2)$是$\mu$的置信水平为0.95的置信区间

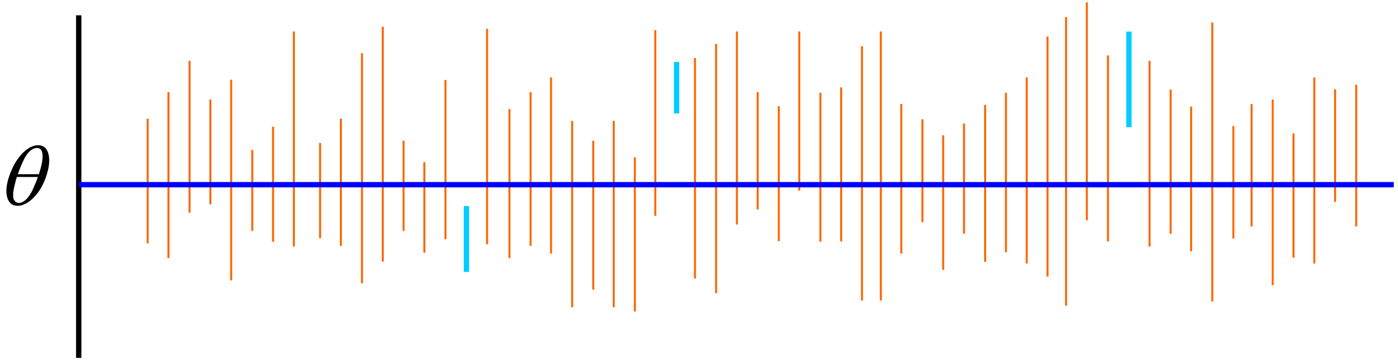
若$\mu=0.5$,当$\bar{x}$分别为3, 2, 1时，对应区间为：

$(1,5)$, $(0,4)$, $(-1,3)$

如果$P\left\{\hat{\theta}_L(X_1,\ldots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\ldots,X_n)\right\}=1-\alpha$,

则置信区间$\left(\hat{\theta}_L,\ \hat{\theta}_U\right)$的含义为：

反复抽样多次(各次样本容量都为n).每个样本值确定一个区间$\left(\hat{\theta}_L,\ \hat{\theta}_U\right)$,每个这样的区间或包含$\theta$的真值,或不包含$\theta$的真值. 按伯努利大数定律,在这些区间中，包含$\theta$真值的比例约为$1-\alpha$.



如反复抽样10000次，当 $\alpha=0.05$,即置信水平为95%时，10000个区间中包含 θ 真值的约为9500个；

当 $\alpha=0.01$,即置信水平为99%时，10000个区间中包含 θ 的真值的约为9900个.

定义2： 如果$P\left\{\hat{\theta}_L(X_1,\ldots,X_n)<\theta\right\}\geq 1-\alpha$，则称$\hat{\theta}_L$是参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的**单侧置信下限.**

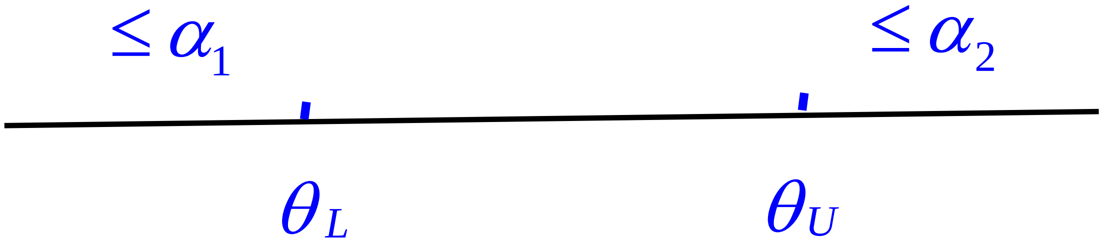
如果$P\left\{\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\ldots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$，则称$\hat{\theta}_U$是参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的**单侧置信上限.**

单侧置信限和双侧置信区间的关系：

设θ_L是θ的置信水平为$1-\alpha_1$的单侧置信下限，

θ_U是θ的置信水平为$1-\alpha_2$的单侧置信上限，

则(θ_L,θ_U)是θ的置信度为$1-\alpha_1-\alpha_2$的双侧置信区间。



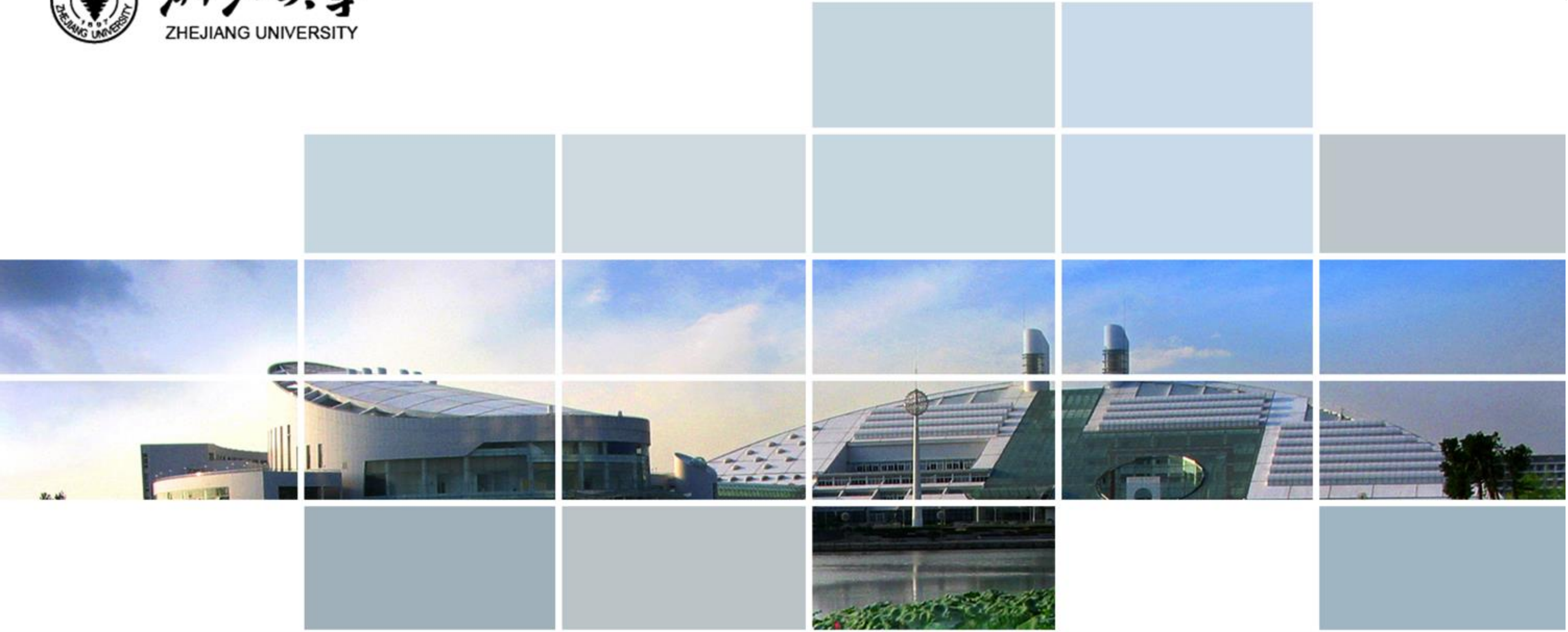
定义3：称置信区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$的平均长度$E(\hat{\theta}_U-\hat{\theta}_L)$为区间的**精确度**，精确度的一半为**误差限**.

- 在给定的样本容量下，置信水平和精确度是**相互制约**的.

Neyman原则：

在置信水平达到$1-\alpha$的置信区间中，选精确度尽可能高的置信区间.

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第50讲　　枢轴量法

问题:

设总体X的分布有未知参数θ, $X_1,\ldots,X_n$是样本.

如何给出θ的置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间呢?

(1) 找一个量G,使G分布已知.

(2) 找$a<b$,使 $P(a<G<b)\geq 1-\alpha$.

因为要求θ的区间估计，所以G应该是θ和样本$X_1,\ldots,X_n$的函数.

(3) 从$a<G<b$解出$\theta_L<\theta<\theta_U$

(θ_L,θ_U)就是置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间.

定义1: 设总体X有概率密度（或分布律）$f(x;\theta)$,

其中θ是待估的未知参数.

设$X_1,\cdots,X_n$是样本. 称样本和未知参数θ的函数

$G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$为**枢轴量**,

如果它的分布已知,不依赖于未知参数θ.

枢轴量和统计量的区别：

- （1）枢轴量是样本和待估参数的函数，
  其分布不依赖于任何未知参数；
- （2）统计量只是样本的函数，
  其分布常依赖于未知参数.

问题:

总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2是未知参数.

设$X_1,\ldots,X_n$是样本, 对μ进行区间估计.

下面三个量中

$$\bar{X},\quad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}},\quad \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

哪些是统计量? 哪些是枢轴量?

(1) 只有$\bar{X}$是统计量，另两个含有未知参数.

(2) $\bar{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$,分布含有未知参数.

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$含有除了$\mu$以外的其他未知参数$\sigma$.

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$只是$\mu$和样本的函数,服从$t(n-1)$分布.

所以只有$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$是枢轴量.

对枢轴量G,满足$P(a<G<b)\geq 1-\alpha$的a,b可能有很多,那到底该选哪个a,b呢?

1. 根据**Neyman**原则：求a和b使得区间长度最短;

2. 如果最优解不存在或比较复杂,对连续型总体,常取a和b满足：

$$P(G(X_1,\ldots,X_n;\theta)\leq a)=P(G(X_1,\ldots,X_n;\theta)\geq b)=\alpha/2$$

构造置信区间三步骤：

(1) 构造枢轴量$G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$;

(2) 对连续型总体,找$a<b$满足

$$P\{G\le a\}=P\{G\ge b\}=\alpha/2;$$

(3)从 $a<G<b$ 解出$\theta_L<\theta<\theta_U$.

那么$\left(\theta_L, \theta_U\right)$就是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间，

θ_L是θ的置信度为$1-\dfrac{\alpha}{2}$的单侧置信下限，

θ_U是θ的置信度为$1-\dfrac{\alpha}{2}$的单侧置信上限.

注: 枢轴量 $G(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ 的构造, 通常从θ的点估计 $\hat{\theta}$(如极大似然估计, 矩估计等)出发, 根据$\hat{\theta}$的分布进行改造而得.

- **正态总体下常见枢轴量：**

(1)单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$情形

$$\mu\text{的枢轴量：}\begin{cases}\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1), & (\sigma^2\text{已知})\\[2ex] \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1), & (\sigma^2\text{未知})\end{cases}$$

$$\sigma^2\text{的枢轴量：}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\ (\mu\text{未知})$$

(2)二个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}),N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$情形

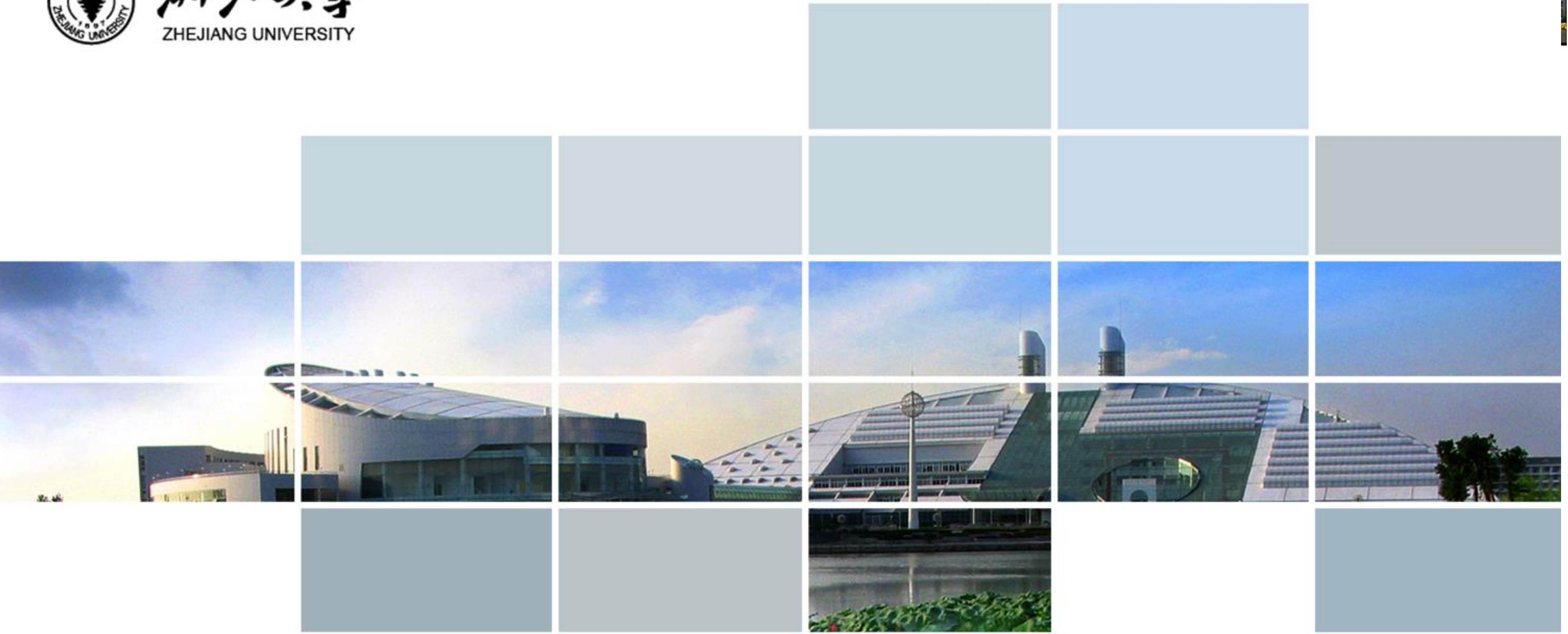
$\mu_1-\mu_2$的枢轴量：

$$\begin{cases} \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}} \sim N(0,1), & (\sigma_1^2,\sigma_2^2 \text{ 已知}) \\ \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2), & (\sigma_1^2=\sigma_2^2\text{未知}) \end{cases}$$

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的枢轴量：

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\bigg/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1), \qquad (\mu_1, \ \mu_2\text{未知})$$

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第51讲 单个正态总体均值的区间估计

设总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本.

$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差.

置信水平为$1-\alpha$.

1. 均值μ的置信区间

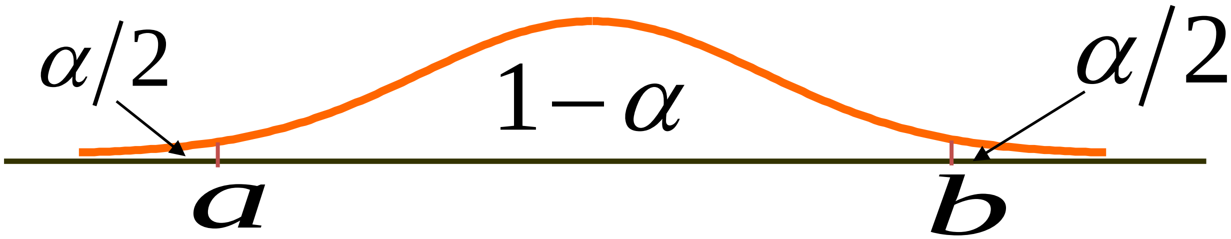
(1) σ^2已知时

$\bar{X}$是μ的无偏估计，取枢轴量$G=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

设常数$a<b$满足：$P\{a<G<b\}\geq 1-\alpha$

等价于 $P\left\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}b<\mu<\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}a\right\}\geq 1-\alpha$

此时区间的长度为 $(b-a)\sigma/\sqrt{n}$



由正态分布的性质知，$a=-b=-z_{\alpha/2}$ 时，区间的长度达到最短.

所以μ的双侧置信区间为：

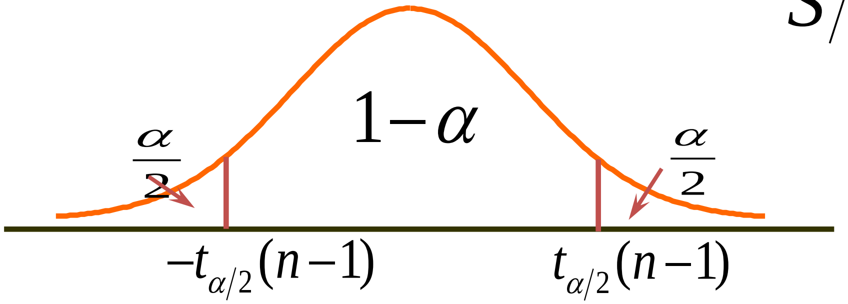
$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

单侧置信下限为$\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$

单侧置信上限为$\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$

(2) σ^2未知时

以S^2估计σ^2，得枢轴量$G=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$



由 $-t_{\alpha/2}(n-1)<G<t_{\alpha/2}(n-1)$解得，

$$\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$$

所以μ的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

单侧置信下限为$\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$

单侧置信上限为$\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$

例 1. 某袋装食品重量(单位：克)$X\sim N(\mu,9)$. 现从一大批该产品中随机抽取10件, 称得重量为：

101.3 99.6 100.4 98.8 96.4

99.1 102.3 97.5 105.4 100.2

求μ的置信水平为95%的双侧置信区间.

解：$n=10,\ \sigma=3,\ \ \alpha=0.05$

计算样本均值得 $\overline{x}=100.1$

查表得$z_{0.025}=1.96$

所以μ的置信水平为95%的双侧置信区间为：

$$(\overline{x}-\frac{3}{\sqrt{10}}z_{0.025},\ \overline{x}+\frac{3}{\sqrt{10}}z_{0.025})=(98.24,\ 101.96)$$

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

例 2. 设新生儿体重(单位：克) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2未知.

现从某妇产医院随机抽查16名新生儿, 称得重量为：

3200	3050	2600	3530	3840	4450	2900	4180
2150	2650	2750	3450	2830	3730	3620	2270

求μ的置信水平为95%的双侧置信区间.

解：$n=16, \alpha=0.05,\ \sigma$未知

计算得 $\bar{x}=3200, s=665.48$

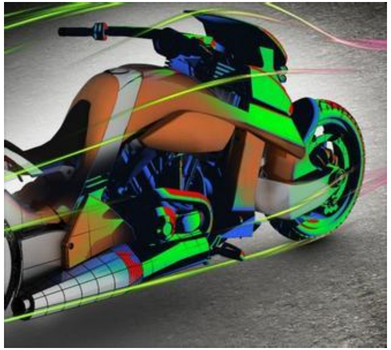
查表得$t_{0.025}(15)=2.1315$

所以μ的置信水平为95%的双侧置信区间为：

$$(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15), \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15))$$

$$=(2845.4,\ \ 3554.6)$$

例 3. 某种产品的寿命(单位：千小时) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2未知. 现随机抽查10件产品进行寿命试验，测得：



样本均值$\overline{x}=5.78$, 样本标准差$s=0.92$.

求μ的置信水平为95%的单侧置信下限.

解：查表得$t_{0.05}(9)=1.8331$

所以μ的置信水平为95%的单侧置信下限为：

$$\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{10}}t_{0.05}(9)=5.78-\frac{0.92}{\sqrt{10}}\times 1.8331=5.25$$

•其他总体均值的区间估计

设总体X的均值为μ,方差为σ^2,非正态分布或不知分布形式. 样本为$X_1,\ldots,X_n$.

当n充分大（一般$n>30$）时，由中心极限定理知,

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1).$$

当σ^2已知时，μ的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},\quad \bar{X}+z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\right)$$

当σ^2未知时，以样本方差S^2代入，得近似置信区间为

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}S/\sqrt{n},\quad \bar{X}+z_{\alpha/2}S/\sqrt{n}\right)$$

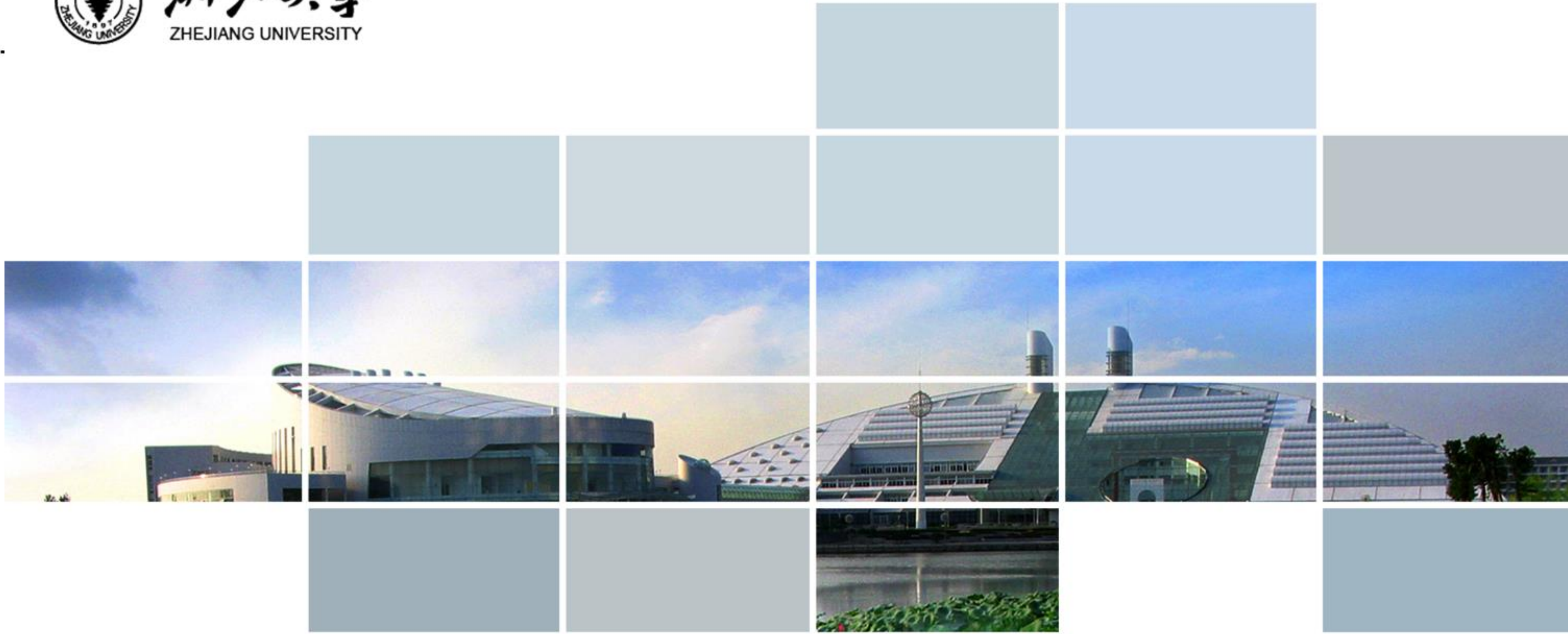
例4: 某市随机抽取1500个家庭，调查知道其中有375家拥有私家车. 试根据此调查结果，求该市拥有私家车比例p的置信水平为95%近似置信区间.

解：$\hat{p}=\bar{x}=\dfrac{375}{1500}=0.25,\ s^2=\hat{p}(1-\hat{p})=0.1875$

代入近似置信区间

$$\left(\bar{X}-z_{0.025}S/\sqrt{n},\quad \bar{X}+z_{0.025}S/\sqrt{n}\right)$$

得 $(0.228,\quad 0.272).$



第52讲 成对数据均值差，单个正态总体方差的区间估计

(3）成对数据情形

例：为考察某种降压药的降压效果，测试了n个高血压病人在服药前后的血压（收缩压）分别为

$$(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n).$$

由于个人体质的差异，$X_1,\cdots,X_n$不能看成来自同一个正态总体的样本，即$X_1,\cdots,X_n$是相互独立但不同分布的样本，$Y_1,\cdots,Y_n$也是. 另外对同一个个体，X_i和Y_i也是不独立的.

作差值 $D_i = X_i - Y_i$， $i = 1,\cdots,n$,则取消了个体的差异，仅与降压药的作用有关，因此可以将$D_1,\cdots,D_n$看成来自同一正态总体$N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本，且相互独立.

μ_d的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{D} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right)$$

其中$\bar{D} = \bar{X} - \bar{Y}$， $S_D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2$

例1：为评价某种训练方法是否能有效提高大学生的立定跳远成绩，在某大学随机选中16名学生，测量他们的立定跳远成绩（三次中最好成绩），经过三个月训练后再测量他们的成绩。实验数据如下页.

假设训练前后成绩差$D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$，求$\mu_D$的置信水平为95%的双侧置信区间.

编号	1	2	3	4	5	6	7	8
训练前	189	193	230	210	198	230	210	198
训练后	220	195	234	231	225	228	238	240
数值差	31	2	4	21	27	13	4	16

编号	9	10	11	12	13	14	15	16
训练前	209	220	195	211	228	216	212	231
训练后	221	218	214	236	248	248	230	245
数值差	12	—2	19	25	20	32	18	14

解：这是成对数据问题，$n=16, \alpha=0.05$. 令$d_i = x_i - y_i$.

算得$\overline{d} = 16, s_d = 10.24$. 查表得$t_{0.025}(15) = 2.1315$,

代入公式$(\overline{D} \pm t_{\alpha/2}(n-1)S_D/\sqrt{n})$中,

得所求置信区间为 $(10.5,\quad 21.5)$.

2. 方差σ^2的置信区间(μ未知)

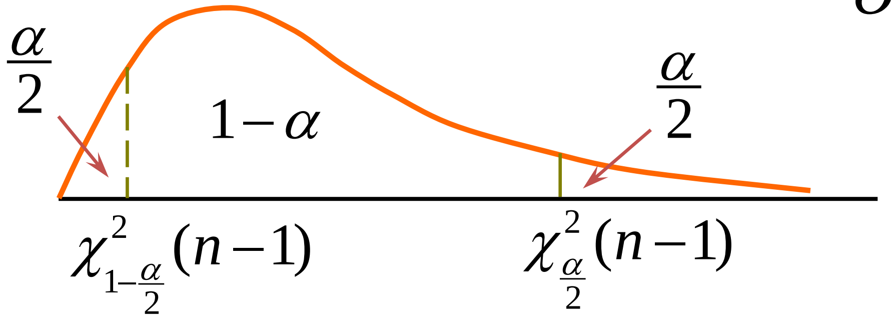
设总体$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, μ, σ^2未知.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$为样本.

$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差.

置信度为$1-\alpha$.

由σ^2的无偏估计S^2想到枢轴量$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$



由$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

推出$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$

双侧置信区间为：$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

单侧置信下限为：$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$

单侧置信上限为：$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

注：上述双侧置信区间估计不是最优解

例2：一个园艺科学家正在培养一个新品种的苹果，这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外，另一个重要特征是单个重量差异不大. 为了评估新苹果，她随机挑选了25个测试重量(单位：克)，其样本方差为$s^2=4.25$.试求σ^2的置信度为95%双侧置信区间和单侧置信上限.

解：$n = 25,\ s^2 = 4.25, \alpha = 0.05$

查表得：$\chi^2_{0.025}(24) = 39.4,\qquad \chi^2_{0.975}(24) = 12.4;$

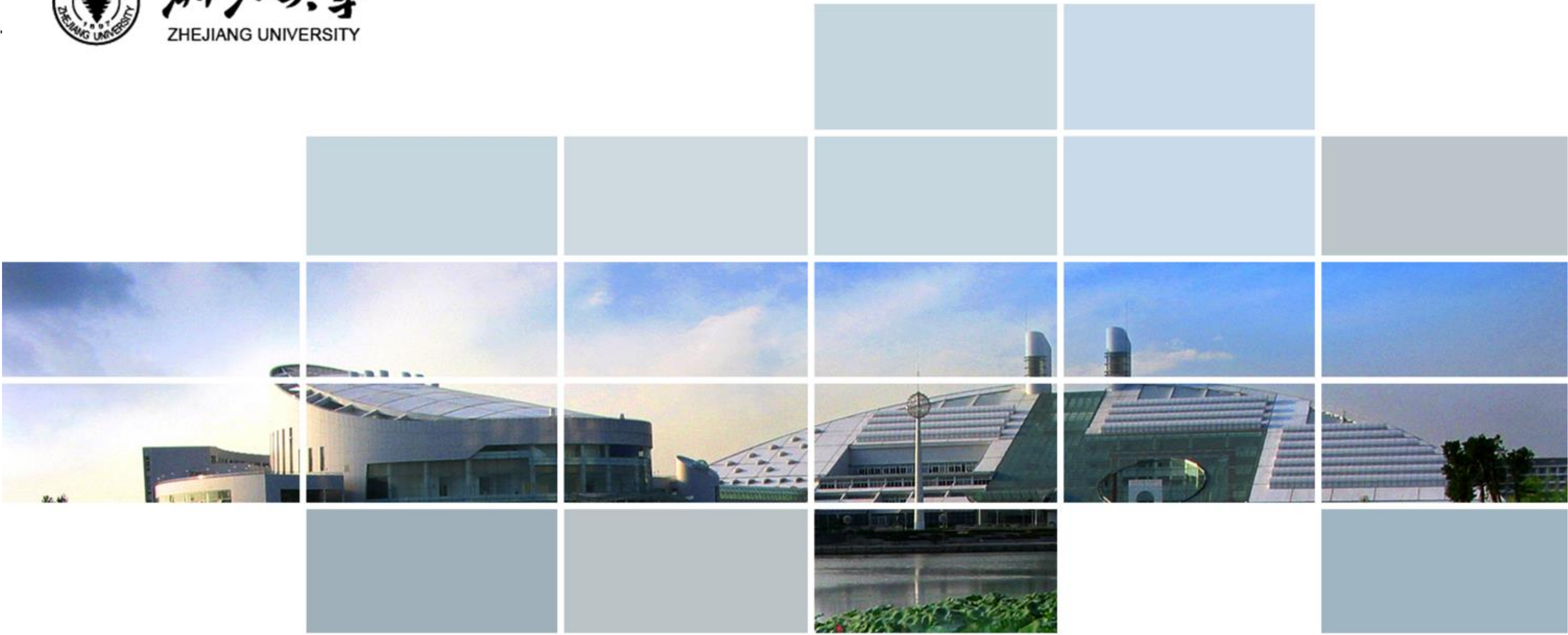
$\chi^2_{0.95}(24) = 13.85,$

σ^2的双侧置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = (2.59, 8.23)$$

σ^2的双侧置信上限为$\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)} = 7.36$

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第53讲　两个正态总体参数的区间估计

设样本$\left(X_1,\cdots,X_{n_1}\right)$和$\left(Y_1,\cdots,Y_{n_2}\right)$分别来自总体

$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$和$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$,并且它们相互独立.

样本均值分别为$\bar{X},\bar{Y}$;样本方差分别为S_1^2,S_2^2.

置信水平为 $1-\alpha$.

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1) σ_1^2,σ_2^2已知时

由$\mu_1-\mu_2$的估计$\bar{X}-\bar{Y}$想到枢轴量:

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N\left(0,1\right)$$

得置信区间: $\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知

以$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$代替$\sigma^2$得枢轴量:

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

置信区间为: $\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$

(3) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$且未知

以S_1^2估计σ_1^2,以S_2^2估计σ_2^2

当样本量n_1和n_2都充分大时(一般要>30),

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

得近似置信区间为:
$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)$$

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

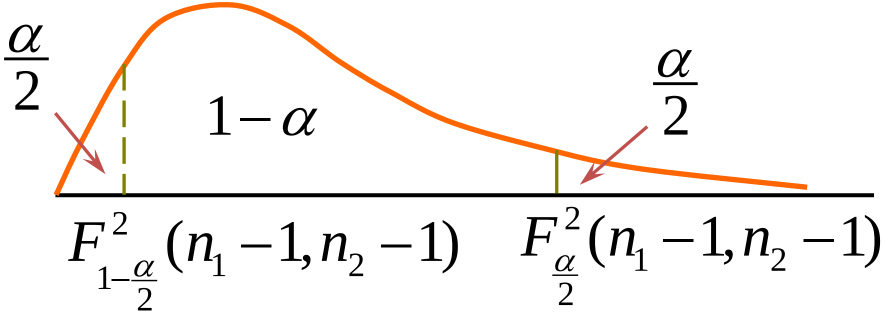
当样本量小时，$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\overset{\text{近似}}{\sim} t(k)$，

其中 $k \approx \min(n_1-1, n_2-1)$

则近似置信区间为：$\left((\bar{X}-\bar{Y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(k)\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$

2. $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间（$\mu_1,\mu_2$未知）

由$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的估计$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$想到枢轴量 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$



由$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1) < \dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$

得 $$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}$$

置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

例 1. 两台机床生产同一型号滚珠. 从甲机床生产的滚珠中取8个, 从乙机床生产的滚珠的中取9个. 测得这些滚珠的直径（单位：毫米）如下：

甲机床: 15.0 14.8 15.2 15.4 14.9 15.1 15.2 14.8

乙机床: 15.2 15.0 14.8 15.1 14.6 14.8 15.1 14.5 15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X,Y,且

$$X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right).$$

求置信水平为 0.9 的双侧置信区间.

(1) $\sigma_1 = 0.18,\ \sigma_2 = 0.24$, 求$\mu_1 - \mu_2$的置信区间;

(2)若$\sigma_1 = \sigma_2$且未知, 求$\mu_1 - \mu_2$的置信区间;

(3)若$\sigma_1 \neq \sigma_2$且未知，求$\mu_1 - \mu_2$的置信区间;

(4)若μ_1, μ_2未知，求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间.

解： $n_1=8,\ \bar{x}=15.05,\ S_1^2=0.0457;$

$n_2=9,\ \bar{y}=14.9,\ S_2^2=0.0575,\ \alpha=0.1$

(1) 当$\sigma_1=0.18,\sigma_2=0.24$时，$\mu_1-\mu_2$的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$z_{0.05}=1.645$，从而所求区间为$(-0.018,0.318)$

(2) 当$\sigma_1=\sigma_2$且未知时，$\mu_1-\mu_2$的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

$$t_{0.05}(15)=1.7531, S_w=0.228, \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=0.486$$

从而所求区间为$(-0.044, 0.344)$

(3) 当$\sigma_1 \neq \sigma_2$且未知时，$\mu_1 - \mu_2$的置信区间为：

$$\left(\left(\bar{X} - \bar{Y} \right) \pm t_{\alpha/2}(k) \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right)$$

其中自由度k取$\min(n_1 - 1, n_2 - 1) = 7$

$t_{0.05}(7) = 1.895$，从而所求区间为$(-0.058, 0.358)$

注：由(1)、（2）和（3）求得的三个区间都包含了0，说明两机床生产的滚珠的平均直径没有显著差异.

(4) 当μ_1,μ_2未知时，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

由$F_{0.05}(7,8)=3.50, F_{0.95}(7,8)=\dfrac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\dfrac{1}{3.73}=0.268$

得$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为$(0.227,2.965)$

注：(4) 中所求置信区间包含1, 说明两机床生产的滚珠直径的方差没有显著差异.